# XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
## Segunda Fase – Nível Universitário
## PRIMEIRO DIA

**PROBLEMA 1**

Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^{2008}}{2008} + x^2 - nx$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e seja $m_n$ o valor mínimo assumido por $f_n$. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m_n}{n^\alpha}$ existe e é não-nulo, e calcule esse limite (para esse valor de $\alpha$).

**PROBLEMA 2**

No $\mathbb{R}^3$, considere a elipse $\mathcal{E}_1$ definida pelas equações $x = 0$ e $41y^2 + 41z^2 - 80yz + 36y + 36z - 81 = 0$, e a elipse $\mathcal{E}_2$ definida pelas equações $y = 0$ e $71x^2 + 41z^2 - 40xz + 18x + 36z - 81 = 0$. Prove que existe uma única superfície cônica de revolução no $\mathbb{R}^3$ que intersecta o plano $x = 0$ em $\mathcal{E}_1$ e o plano $y = 0$ em $\mathcal{E}_2$, e determine a interseção dessa superfície com o plano $z = 0$.

**PROBLEMA 3**

Mostre que existem $a_1, a_2, ..., \in \mathbb{R}$ tais que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$ e, definindo $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, temos:

i) $f$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que satisfaz $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{A}$, onde $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p(x)$ polinômio com coeficientes inteiros tal que $p(\alpha) = 0\}$ é o conjunto dos algébricos reais.

# XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
## Segunda Fase – Nível Universitário
## SEGUNDO DIA

**PROBLEMA 4**

Seja $Q=[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2$ um quadrado de lado 1 e $f:Q\to\mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Prove que é possível dividir $Q$ em duas regiões $R_1$ e $R_2$ de mesma área, separadas por um segmento de reta, tais que $\int_{R_1} f(x,y)dxdy=\int_{R_2} f(x,y)dxdy.$

**PROBLEMA 5**

Prove que não existe uma matriz $7\times 7$, $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 7}$, com $a_{ij}\ge 0, 1\le i,j\le 7$ cujos autovalores (contados com multiplicidade) são: 6, –5, –5, 1, 1, 1, 1.

**PROBLEMA 6**

Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda}{(\lambda+n^2)^2}<\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda+n^2}, \forall\lambda\ge 0.$