XXXIV Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

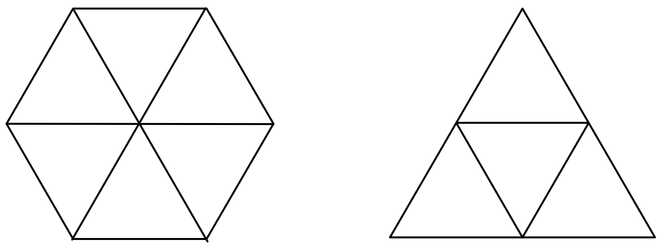
Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	0030	0819	0160	0009	0045	0120

01. [Resposta: 0030]
Solução: Áurea levou 45 min entre A e B, passando por um ponto a cada 3 min.

Assim o número de pontos em que o ônibus parou após sair do terminal A é $\frac{45}{3}=15$, e a distância entre os terminais é $15\times 2=30$ km.

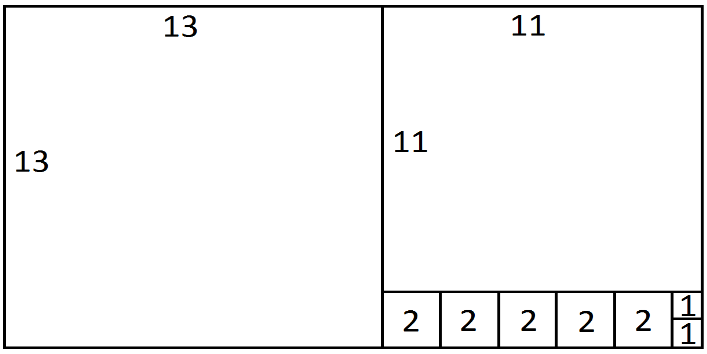
02. [Resposta: 0819]
Solução: Os números somados são XXXX = 1000X + 100X + 10X + X = 1111X, YYYY = 1111Y e ZZZZ = 1111Z, e o resultado da soma é YXXXZ = 10000Y + 1110X + Z. Logo 1111X + 1111Y + 1111Z = 10000Y + 1110X + Z $\Leftrightarrow$ 8889Y = 1110Z + X = ZZZX. O número ZZZX tem quatro algarismos, logo Y só pode ser igual a 1, Z = 8 e X = 9. Assim ZYX = 819.

03. [Resposta: 0160]
Solução: Sendo a e b os lados do triângulo e do hexágono, respectivamente, temos $3a = 6b \Leftrightarrow a = 2b$. O hexágono pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros de lado b e o triângulo equilátero de lado $a = 2b$ pode ser dividido em 4 triângulos equiláteros de lado b.



A área do triângulo equilátero de lado a é, então, $\frac{4}{6}$ da área do hexágono, ou seja, $\frac{2}{3}\times 240=160\text{ cm}^2$.

04. [Resposta: 0009]
Solução: Podemos dividir o retângulo em 9 quadrados como mostra a figura abaixo:



Pode-se verificar que não é possível fazer uma divisão em 8 ou menos quadrados.

05. [Resposta: 0045]
Solução: Primeiro note que só vale colocar parênteses logo depois de sinais de –, já que se o fizermos em frente ao sinal de + não alteramos o resultado.

Ao efetuarmos os parênteses, o 2 terá sinal de – necessariamente. Suponha que não colocamos parênteses depois do sinal de – do 2. Então o 4 também deve ter sinal de – quando efetuamos os parênteses, e a soma é no máximo $1 - 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 43$.

Então é mais vantajoso colocar parênteses entre o – e o 2. Ao fazermos isso, ao efetuarmos os parênteses o 3 deve ter necessariamente sinal de –, e a soma é no máximo $1 - 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$. Podemos obter esse resultado:

$$1 - (2 + 3 - (4 + 5) - (6 + 7) - (8 + 9) - 10) = 45.$$

Então a maior soma possível é 45.

06. [Resposta: 0120]
Solução: Seja x a quantidade de meninas no ano passado. Então havia $200 - x$ meninos. Assim, como o aumento foi de 10% para meninos, 20% para meninas e 30 no total, temos

$$0{,}10(200 - x) + 0{,}20x = 30 \Leftrightarrow x = 100$$

Logo, após o aumento de 20%, existem $100 \cdot 1{,}20 = 120$ meninas na escola.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

a) Como Beto foi o primeiro a jogar e somou 6 pontos ele tirou 3 no dado. Assim, os outros dois somaram –3 pontos cada. Após a jogada de Carlos, para que tenha ficado com 5 pontos, deve ter somado 8, ou seja tirou 4 no dado, somando –4 pontos para cada adversário. Na última jogada para passar de –7 para 5 pontos Ana tem que ter tirado 6 no dado, fazendo cada um dos outros descontar 6 de seus pontos. A tabela completa fica:

Saldo de A	Saldo de B	Saldo de C
–3	**6**	–3
–7	2	**5**
5	–4	–1

b) Completando a tabela como no item a) temos:

Saldo de A	Saldo de B	Saldo de C
–2	–2	4
4	–5	1
3	–3	0
–1	–7	8
9	–12	3
3	0	–3

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Item a)

• Apresentou a tabela correta **[+ 4 pontos]**

Item b)

• Saldo correto **[+ 1 ponto por jogada]**

Se o estudante errar uma jogada mas acertar as subsequentes, dar as pontuações coerentes.

PROBLEMA 2:

a) Vemos que para passar da figura k para figura $k + 1$ acrescentamos $k + 1$ quadradinhos em cada lado da figura, sendo que os dos vértices estamos contando duas vezes. Assim, estamos acrescentando $4k$ quadradinhos.

Logo, na figura 5 teremos $1 + 4 + 8 + 12 + 16 = 41$ quadradinhos de lado unitário, totalizando uma área de 41cm².

b) Na figura 10, teremos em cada lado 10 quadradinhos com algum lado para fora da figura. Desses 10, 8 não estão nos cantos da figura e logo possuem apenas 2 lados participando do perímetro. Os 4 que estão no vértice possuem 3 lados que participam do perímetro.

Logo, o perímetro da figura 10 é $2\times4\times8 + 4\times3 = 76$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Item a)
• Encontrou o número de quadradinhos da figura 5 **[+ 3 pontos]**
• Concluiu o valor da área **[+1 ponto]**
Item b)
• Contou quantos quadradinhos participam do perímetro da figura 10 **[+ 2 pontos]**
• Percebeu que cada quadradinho pode participar de duas maneiras no perímetro, contribuindo com 2 ou 3 lados **[+ 2 pontos]**
• Concluiu, obtendo 76 como resposta: **[+ 2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores:
• Encontrou a recorrência correta para a área da figura **[2 pontos]**, provou que a fórmula está correta **[+1 ponto]**
• Encontrou a recorrência correta para o perímetro da figura **[4 pontos]**, provou que a fórmula está correta **[+1 ponto]**

PROBLEMA 3:
a) A sequência de números obtidos é 2012, 203, 23 e 5.
b) Vamos pensar no caminho contrário, para terminarmos em 1 o número anterior tinha que ser 10, para se transformar em 10 o número anterior poderia ser: 100, 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19. Vemos que agora, fazendo a transformação contrária com qualquer um desses números, o primeiro algarismo não se alterará mais. Logo, para obter o maior número precisamos que o primeiro algarismo seja o maior possível. Fazendo a transformação contrária com o número 91, concluímos que ele só pode ter vindo do 910 ou do 901. O 910 ainda pode ser formado pelos números 919, 928, 937, 946, 955, 964, 973, 982, 991. Logo, o maior é o 991.
c) Sendo a e b os algarismos da dezena e da unidade de um número $N = 100k + 10a + b$, ao realizarmos a operação trocamos N por $10k + a + b$ (caso $a + b$ tenha um só dígito) ou por $100k + a + b$ (caso $a + b$ tenha dois dígitos). A diferença entre o N e o número obtido é $90k + 9a$ no primeiro caso e $9a$ no segundo caso, ou seja, sempre um múltiplo de 9. Desta forma, o resto da divisão dos números obtidos na divisão por 9 nunca muda.
Logo os números que podem ser transformados em 9 são os que deixam o mesmo resto na divisão por 9 do que o 9, ou seja, os múltiplos de 9. Como todos os números após alguma quantidade de operações ficam com 1 algarismo, qualquer número divisível por 9 se transformará em 9.
Como 2012 dividido por 9 dá quociente 223 e resto 5, descontando o 9 há 222 números de dois ou mais algarismos menores do que 2012 que podem ser transformados no número 9.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Item a)
• Apresentou a sequência correta: **[2 pontos]**
• Apresentou a sequência com no máximo um termo errado: **[1 ponto]**
• Apresentou a sequência com mais de um termo errado: **[0 ponto]**
Item b)
• Percebeu que o número 1 só pode ter sido formado pelo número 10: **[+ 1 ponto]**
• Encontrou todos os possíveis números que podem se transformar no 10: **[+ 1 ponto]**
• Concluiu, obtendo 991 como resposta: **[+ 1 ponto]**
Item c)
• Mostrou que a transformação não altera o resto na divisão por 9 **[+ 3 pontos]**
• Concluíu **[+ 2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
• Exibiu corretamente todos os números que podem ser transformados em 9 no item c. Para os números de 2 algarismos **[1 ponto]**, para os de 3 algarismos **[2 pontos]** e para os de 4 algarimos **[3 pontos]**.