35ª Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	1225	0008	0102	0120	0004	0010

01. [Resposta: 1225]
Solução: Veja que, se a soma do primeiro, segundo e terceiro é igual à soma do segundo, terceiro e quarto, então o primeiro é igual ao quarto. Do mesmo modo, temos o segundo igual ao quinto e o terceiro igual ao sexto. Assim:

1	x	5	1	x	5

onde x é desconhecido. Porém, sabemos que 7 deveria aparecer e, logo, $x = 7$.
Portanto o produto de todos os 6 números é $1 \times 7 \times 5 \times 1 \times 7 \times 5 = 1225$.

02. [Resposta: 0008]
Solução: Um número é quadrado perfeito quando os primos em sua fatoração tem expoente par. Assim, observando que $28 = 7^1.2^2$ e $7 = 7^1$, nota-se que devemos intervir no expoente do 7. Fora isso, não devemos nos preocupar com o 2, pois o seu expoente em 28 é 2, que é par. Então, pelo menos um dos números a ou b é divísvel por 7, ou seja, um deles é pelo menos 7 e o outro é pelo menos 1. Logo a soma é no mínimo 8.
Note que os valores $a = 7$ e $b = 1$ satisfazem a condição, já que $28 \cdot a^3 \cdot b = 98^2$ e que $7 \cdot a \cdot b^5 = 7^2$.

03. [Resposta: 0102]
Solução: Sendo x a quantidade de retângulos que enfileiramos com o lado 3 cm e y a quantidade que enfileiramos com o lado 4 cm, então $x \cdot y = 12$ é o total de retângulos e o perímetro é $3x + 3x + 4y + 4y = 6x + 8y$.
E assim, temos apenas que verificar os seguintes casos:

$x = 1, y = 12 \rightarrow perímetro = 102$
$x = 2, y = 6 \rightarrow perímetro = 60$
$x = 3, y = 4 \rightarrow perímetro = 50$
$x = 4, y = 3 \rightarrow perímetro = 48$
$x = 6, y = 2 \rightarrow perímetro = 52$
$x = 12, y = 1 \rightarrow perímetro = 80$

Vemos, portanto, que o perímetro máximo é 102.

04. [Resposta: 0120]
Solução: Veja que o maior resultado dessa conta acontece quando pegamos o maior par de números possíveis nas dezenas dos números somados. Além disso, devemos ter um "vai um", pois o resultado possui 3 dígitos. Assim, considere os maiores pares em ordem decrescente:

- Caso 7 e 6: no resultado teríamos nas centenas e dezenas 13 ou 14 (havendo vai um das unidades), mas como não temos 4, então teria que ser 13. Aí sobram apenas $0, 2$ e 5 para completar a conta, o que não é possível.
- Caso 7 e 5: no resultado teríamos nas centenas e dezenas 12 ou 13. Restaria nas unidades $0, 3, 6$ ou $0, 2, 6$. E nos dois casos não é possível completar a expressão.
- Caso 5 e 6: no resultado teríamos nas centenas e dezenas 11 ou 12. Como só temos um dígito 1, teria que ser o 12, sobrando $0, 3$ e 7 que permite completar a expressão, que seria:

$67 + 53 = 120$

ou

$63 + 57 = 120$

Note que se pegarmos uma combinação menor das dezenas teremos soma máxima 10 ou 11, com um "vai um", geraria números menores que 120.

05. [Resposta: 0004]
Solução:
Vamos supor que esse máximo fosse 3. Sendo C a questão que ela marcou a alternativa correta e E a questão que ela errou, então, a maior quantidade que Júlia poderia acertar ocorreria quando $C, C, C, E, C, C, C, E, C, C, C, E \dots$
Ou seja, ela acertaria 3 e erraria 1 em cada 4 questões. Ora, mas isso seria igual a $\frac{3}{4} \cdot 128 = 96$, que é menor do que as 100 que ela acertou. Desse modo, $N > 3$.
Analisando o caso seguinte, veja que ela pode acertar, por exemplo,
$C, C, C, C, E, C, C, C, C, E, \dots, C, C, C, C, E, E, E, E$
onde ela acertaria $\frac{4}{5} \cdot 125 = 100$ questões até a questão 125 e ela erraria as 3 últimas.

06. [Resposta: 0010]
Solução:
Veja que, se antes de um aluno ir ao quadro, havia n números, então:

- Se n é par, passamos a ter $\frac{n}{2}$ números, apagando-se o segundo, o quarto, ..., e o n-ésimo.
- Se n é ímpar, passamos a ter $\frac{n+1}{2}$ números, apagando-se o segundo, o quarto, ..., e o $(n-1)$-ésimo.

Vamos então olhar quantos números restam após cada aluno ir até o quadro:
$1000 \to 500 \to 250 \to 125 \to 63 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

Ou seja, vemos que 10 alunos foram até o quadro.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

a)

linha	X	Y
1	2	1
2	2	2
3	2^2	1
4	2^2	2^2
5	2^4	1
6	2^4	2^4
7	2^8	1
8	2^8	2^8
9	2^{16}	1
10	2^{16}	2^{16}

b) Vemos, na tabela acima, que os expoentes do 2 nas linhas 2, 4, 6, 8 e 10 são, respectivamente, 1, 2, 4, 8 e 16, isto é, dobram a cada duas linhas. Assim, na linha de número $2n$, o expoente do 2 é 2^{n-1}. Portanto, na linha 2012, o expoente de 2 é 2^{1005} isto é $X = Y = 2^{2^{1005}}$.

Assim, na linha 2013 o expoente de 2 é $2^{2^{1005}} \times 2^{2^{1005}} = 2^{2^{1005}+2^{1005}} = 2^{2\times 2^{1005}} = 2^{2^{1+1005}} = 2^{2^{1006}}$.

Logo $X + Y = 2^{2^{1006}} + 1$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Item a: **[6 pontos]**
- Erros de conta na conclusão do item a: **[–1 ponto]**

- Item b: **[4 pontos]**
- Erros de conta na conclusão do item b: **[–1 ponto]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
- No item a, encontrou corretamente até a linha 6. **[2 pontos]**
- No item a, encontrou corretamente até a linha 7. **[3 pontos]**
- No item a, encontrou corretamente até a linha 8. **[4 pontos]**
- No item a, encontrou corretamente até a linha 9. **[5 pontos]**

PROBLEMA 2:
O corte dos cubinhos em cada vértice do cubo não muda a superfície total do cubo (é como retirar e aumentar três faces de cada cubinho), igual a $6 \times 10^2 = 600\,\text{cm}^2$. Logo o preço do revestimento é 8 x R$ 600 = R$ 4.800,00.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
• Argumentou que a área retirada de cada cubinho é igual à área que fica exposta **[4 pontos]**
• Encontrou a área do cubo, que é igual à área do sólido **[+ 4 pontos]**
• Concluiu com o valor correto **[+ 2 pontos]**

• Erros de conta: **[–1 ponto]**
Caso o aluno cometa mais de um erro, mas manter raciocínio correto, descontar apenas uma vez.

Solução Alternativa (não acumulativo com as pontuações da solução anterior)
• Encontrou a área das faces grandes da figura final ($10 \cdot 10 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 84$) **[2 pontos]**
• Encontrou a área das faces pequenas ($2 \cdot 2 = 4$) **[+ 2 pontos]**
• Contou corretamente o número de faces pequenas (24 faces) **[+ 2 pontos]**
• Encontrou a área do sólido ($6 \cdot 84 + 24 \cdot 4 = 600$) **[+ 2 pontos]**
• Concluiu com o valor correto **[+ 2 pontos]**

• Erros de conta: **[–1 ponto]**
Caso o aluno cometa mais de um erro, mas manter raciocínio correto, descontar apenas uma vez.

PROBLEMA 3:

a) Como a base BD é paralela à base CE, os triângulos BCD e BED têm a mesma base e a mesma altura, logo têm a mesma área. Como a intersecção desses dois triângulos é o triângulo ABD, concluímos que [BCD] – [ABD] = [BED] – [ABD], ou seja, [ABC] = [ADE].

b) Trace o segmento GH. Os quadriláteros BCHG e EFHG são trapézios. No trapézio BCHG, pelo item a, temos [ABC] = [AGH] = 5 cm^2 e no trapézio EFHG temos [EDF] = [DGH] = 4 cm^2.
Portanto a área do quadrilátero AGDH é [AGH] + [DGH] = 5 + 4 = 9 cm^2.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Item a: **[4 pontos]**
- Escreveu que área do ABC mais área do ABD é igual à área do BCD (ou equação análoga relacionando ABC ou ADE com triângulos BCD ou BCE) **[1 ponto]**
- Escreveu que área do BCD é igual à área do BED (ou que área do BCE é igual à área do DCE) **[+2 pontos]**
- Concluiu **[+1 ponto]**

- Item b: **[6 pontos]**
- Traçou GH em alguma figura **[2 pontos]**
- Verificou que BCHG e EFHG são trapézios **[+2 pontos]**
- Concluiu usando o fato do item a **[+2 pontos]**

- Erros de conta na conclusão do item b: **[–1 ponto]**