36ª Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	6	45	6	96	33	39

01. [Resposta: 6]

Note que a sequência segue o padrão $10 \to 5 \to 12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to \cdots$, repetindo-o a cada 5 números. Sabendo que 2014 deixa resto 4 na divisão por 5, o 2014° número será igual ao 4° número da sequência, que é 6.

02. [Resposta: 45]

Vamos considerar a ordem de altura das crianças do menor para o maior, chamando o menor de 1, o segundo menor de 2, e seguimos até chamar o maior de 10. Temos então $(1,2,3, \ldots ,9,10)$.
Em cada troca, um número à direita de outro passa à esquerda desse número. Então, podemos contar que o número de trocas feitas é pelo menos o número de passadas da direita para a esquerda que devem acontecer. O 10 deve passar 9 vezes, cada um dos números de 1 a 9. O número 9 deve passar 8 vezes, e assim por diante. Portanto podemos concluir que o número de trocas é pelo menos $9 + 8 + \cdots + 2 + 1 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$.
De fato, podemos fazer com essa quantidade de trocas se fizermos o 10 trocar 9 vezes para a esquerda, em seguida o 9 trocar 8 vezes para a esquerda, seguindo até que o 2 troca uma vez para a esquerda.

03. [Resposta: 6]

A menor soma possível de três números inteiros diferentes maiores que zero é $1 + 2 + 3 = 6$. Portanto, se conseguirmos colocar 1, 2 e 3 nas casas destacadas, essa soma será a menor possível. E tal situação é possível como no exemplo a seguir.

1	9	10
8	2	7
11	6	3

Note que a linha e coluna do 1 somam 20, a linha e coluna do 2 somam 17 e, finalmente, a linha e coluna do 3 somam 20.

04. [Resposta: 96]

Como é possível coincidir CN com AD, temos $CN = AD = 8$ cm. Logo o retângulo $ABCD$ tem lados $AD = 8$ cm e $AB = AM + MB = 4 + 8$, ou seja, $AB = 12$ cm. Portanto a área do retângulo $ABCD$ é $8 \cdot 12 = 96$ cm^2.

05. [Resposta: 33]

Observe que o conjunto $\{a, b\}$, com $a < b$, satisfaz a propriedade quando:

$$a + b = 2(b - a) \Leftrightarrow a + b = 2b - 2a \Leftrightarrow 3a = b$$

Desse modo, podemos notar que os conjuntos são $\{1,3\}, \{2,6\}, \{3,9\}, \dots, \{32,96\}$ e $\{33,99\}$.
Veja que se tomássemos $a \geq 34 \Rightarrow b \geq 3 \cdot 34 = 102 > 100$. Concluímos, portanto, que existem 33 conjuntos com essa propriedade e tendo dois números menores que 100.

06. [Resposta: 39]

Observe que a maior soma possível de quatro números de 1 a 9 é $9 + 8 + 7 + 6 = 30$.
Então, observando o canto superior esquerdo, sabemos que o número do centro é no mínimo 6.
Observando os números do canto inferior direito, vemos que a menor soma possível deles é $6 + 1 + 2 + 3 = 12$.
Tomamos o número do centro 6 e dos bordos 1, 2 e 3. Isso é suficiente para determinar o elemento central, que só pode ser 6. E para determinar a soma da borda, basta calcular

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 39$$

Com isso já temos a resposta do problema e note que podemos completar o tabuleiro usando tal proposta.

9	7	4
8	6	2
5	3	1

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

a) O menor inteiro positivo com essas características é o 2.

Observação: se o aluno interpretar que "soma dos algarismos" implica ter dois ou mais algarismos, a resposta seria 12*, que será considerada de acordo com o critério a seguir.*

b) O maior número que não possui algarismos repetidos é 9876543210.
Mas a soma dos algarismos desse número é $1+2+\cdots+9=45$ que não é primo. Então devemos excluir pelo menos um dígito desse número. O maior primo menor que 45 é 43, portanto devemos excluir o 2 e obtemos 987654310.
Esse número é o maior número com as três características.
Observe que excluir mais que um algarismo resulta em um número com menos algarismos e, portanto, menor.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Item a: **[3 pontos]**
- Resposta 2. **[3 pontos]**

- Item b: **[7 pontos]**
- Escrever o número 9876543210 **[2 pontos]**
- Observar que a soma dos dígitos é 45 que não é primo **[+2 pontos]**
- Retirar o algarismo 2 e obter 987654310 **[+3 pontos]**

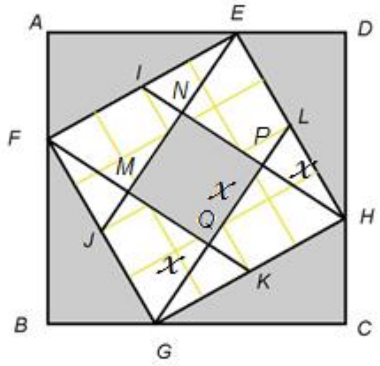
Pontuações não acumulativas: (as pontuações abaixo não podem ser somadas com as pontuações dos itens anteriores)
- Para o item a, resposta 12. **[2 pontos]**
- Para o item a, qualquer resposta diferente de 2 e de 12. **[0 ponto]**
- Para o item b, escrever 987654310 sem justificativa. **[3 pontos]**

PROBLEMA 2:

a) Por simetria, notamos que ED = 12 cm, portanto o lado do quadrado $ABCD$ é 16+12 = 28 cm, consequentemente sua área é 28 · 28 = 784 cm^2.
b) Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo AEF, temos:

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 = 12^2 + 16^2 \Leftrightarrow EF^2 = 144+256 = 400 \Rightarrow EF = 20 \text{ cm}$$

Então a área do quadrado $EFGH$ é 20 · 20 = 400 cm^2.
c) Seja $MNPQ$ o quadrado cinza interior e seja x o comprimento do seu lado.



Veja que os ângulos $\angle GQK = \angle GPH = 90°$, pelos ângulos do quadrado $MNPQ$, logo os triângulos GQK e GPH são semelhantes, e como K é ponto médio a proporção é de $1:2$. Logo, $GQ = QP = x$. Por simetria, todos os outros pedaços análogos serão x, então o quadrado $EFGH$ foi dividido em um quadrado $MNPQ$ e 4 triângulos retângulos de catetos x e $2x$. Temos:

$$[EFGH] = [MNPQ] + 4.[GPH] \Leftrightarrow 400 = x^2 + 4.\frac{x.2x}{2} = 5x^2 \Leftrightarrow x^2 = 80$$

Então a área do quadrado $MNPQ$ é 80 cm^2.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

• Item a: **[3 pontos]**
• Calcular o lado do quadrado $ABCD$ igual a 28 cm. **[2 pontos]**
• Calcular corretamente a área do quadrado $ABCD$ igual a 784 cm^2. **[+1 ponto]**

• Item b: **[3 pontos]**
• Calcular o lado do quadrado $EFGH$ igual a 20 cm. **[2 pontos]**
• Calcular corretamente a área do quadrado $EFGH$ igual a 400 cm^2. **[+1 ponto]**

• Item c: **[4 pontos]**
• GQK e GPH são semelhantes **[2 pontos]**
• Observar que o quadrado $EFGH$ é dividido por quatro triângulos congruentes e o quadrado cinza **[1 ponto]**
• Calcular corretamente a área do quadrado igual a 80 cm^2. **[+1 ponto]**

Pontuações não acumulativas: (as pontuações abaixo não podem ser somadas com as pontuações dos itens anteriores)

• Para o item a, escrever 784 cm^2 sem justificativa. **[1 ponto]**
• Para o item b, escrever 400 cm^2 sem justificativa. **[1 ponto]**
• Para o item c, escrever 80 cm^2 sem justificativa. **[1 ponto]**
• Para o item c, escrever 80 cm^2 usando como justificativa as divisões de quadradinhos sugerida na figura do problema, mas sem demonstração formal. **[3 pontos]**

PROBLEMA 3:

a) Não podemos dividir ($\div$) por 0, logo o primeiro sinal só pode ser $\{+,-,\times\}$.
Note que o resultado não será inteiro quando o terceiro sinal for $\div$ e o segundo não for $\div$ nem $\times$, para esses dois sinais a divisão seria $\frac{0}{4}=0$. Então temos:
Se o primeiro sinal for $+$:

$$2+0+1\div 4=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$
$$2+0-1\div 4=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

Se o primeiro sinal for $-$, o caso é análogo.
Se o primeiro sinal for $\times$, temos:

$$0+1\div 4=\frac{1}{4}$$
$$0-1\div 4=-\frac{1}{4}$$

Concluímos, portanto, que 4 resultados não são inteiros.
b) Basta contar que temos 3 maneiras de escolher o primeiro sinal, 4 maneiras de colocar o segundo e 4 maneiras de escolher o terceiro, ou seja, $3\cdot 4\cdot 4=48$ maneiras.
c) Vamos analisar casos para organizar os resultados.
Se o primeiro sinal for $\times$.

- Se o segundo sinal for $\div$ ou $\times$
    - Se o terceiro sinal for $\div$ ou $\times$, resulta em 0.
    - Se o terceiro sinal for $+$, resulta em 4.
    - Se o terceiro sinal for $-$, resulta em -4.
- Se o segundo sinal for $+$.
    - Se o terceiro for $+$ temos $2\times 0+1+4=5$.
    - Se o terceiro for $-$ temos $2\times 0+1-4=-3$.
    - Se o terceiro for $\div$ temos $2\times 0+1\div 4=\frac{1}{4}$.
    - Se o terceiro for $\times$ temos $2\times 0+1\times 4=4$.
- Se o segundo sinal for $-$.
    - Se o terceiro for $+$ temos $2\times 0-1+4=3$.
    - Se o terceiro for $-$ temos $2\times 0-1-4=-5$.
    - Se o terceiro for $\div$ temos $2\times 0-1\div 4=-\frac{1}{4}$.
    - Se o terceiro for $\times$ temos $2\times 0-1\times 4=-4$.

Se o primeiro sinal for $+$.

- Se o segundo sinal for $\div$ ou $\times$
    - Se o terceiro sinal for $\div$ ou $\times$, resulta em 2.
    - Se o terceiro sinal for $+$, resulta em 6.
    - Se o terceiro sinal for $-$, resulta em -2.
- Se o segundo sinal for $+$.
    - Se o terceiro for $+$ temos $2+0+1+4=7$.
    - Se o terceiro for $-$ temos $2+0+1-4=-1$.
    - Se o terceiro for $\div$ temos $2+0+1\div 4=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$.
    - Se o terceiro for $\times$ temos $2+0+1\times 4=6$.
- Se o segundo sinal for $-$.
    - Se o terceiro for $+$ temos $2+0-1+4=5$.
    - Se o terceiro for $-$ temos $2+0-1-4=-3$.
    - Se o terceiro for $\div$ temos $2+0-1\div 4=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.
    - Se o terceiro for $\times$ temos $2+0-1\times 4=-2$.

Se o primeiro sinal for $-$, temos exatamente os mesmos resultados que tivemos com $+$, pois sabemos que $2+0\ \_\ 1\ \_\ 4$ e $2-0\ \_\ 1\ \_\ 4$ têm as mesmas possibilidades de resultados.
Então os resultados são: $\{-5,-4,-3,-2,-1,-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{7}{4},2,\frac{9}{4},3,4,5,6,7\}$. Vemos um total de 16 resultados diferentes possíveis.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

• Item a: **[3 pontos]**
• Afirmar que os resultados não são inteiros quando ocorre $\div$ 4. **[2 pontos]**
• Afirmar que isso gera quatro resultados diferentes. **[+1 ponto]**

• Item b: **[3 pontos]**
• Afirmar que podemos colocar os sinais de 3, 4 e 4 maneiras, respectivamente. **[2 pontos]**
• Multiplicar e concluir 48 maneiras no total. **[+1 ponto]**

• Item c: **[4 pontos]**
• Se o primeiro sinal for $\times$ **[2 pontos]**
• Se o primeiro sinal for $+$ (ou $-$, se o aluno fizer qualquer um deles). **[1 ponto]**
• Afirmar que se o primeiro sinal for $-$ é análogo (ou se for $+$ caso o aluno faça o outro caso). **[+1 ponto]**

Pontuações não acumulativas: (as pontuações abaixo não podem ser somadas com as pontuações dos itens anteriores)
• Para o item a, escrever 4 sem justificativa. **[1 ponto]**
• Para o item b, escrever 48 sem justificativa. **[1 ponto]**
• Para o item c, escrever 16 sem justificativa. **[1 ponto]**
• Para o item c, escrever 16 e mostrar como obter cada um deles **[3 pontos]**