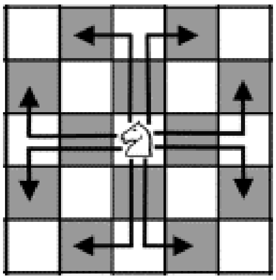
XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (OBM)
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)
PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. João gosta de verificar propriedades do jogo de xadrez em um tabuleiro 5 × 5. Num de seus experimentos, João coloca um cavalo na casa inferior esquerda do tabuleiro 5 × 5. Qual o número mínimo de movimentos do cavalo para que ele possa chegar a qualquer casa do tabuleiro 5 × 5?

Observação: O cavalo movimenta-se em *L*, isto é, anda duas casas em uma direção e, logo em seguida, uma casa na direção perpedicular, como ilustrado na figura abaixo:



02. Dados os reais não-nulos *a* e *b*, sabe-se que:

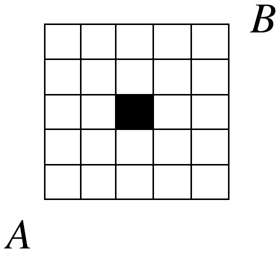
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a-4}{2012} \text{ e } ab=4024.$$

Qual o valor de $a-b$?

03. Zoroastro escreveu os números 1, 2,...,100 em um quadro negro. Ele irá executar algumas operações que reduzirão a quantidade de números até que reste apenas um único número no quadro. A primeira operação consiste em escolher dois números quaisquer *a* e *b* e trocá-los por $a + b - 1$. A segunda operação consiste em novamente escolher dois números quaisquer *a* e *b* e trocá-los por $a + b - 2$. Em geral, depois de executar *k* operações, a nova operação será escolher dois números quaisquer *a* e *b* e substituí-los por $a + b - (k + 1)$. Determine qual o número que restará no final.

04. Qual o menor valor de *n* para que um polígono com *n* lados tenha a soma de seus ângulos internos maior que 2012 graus?

05. Uma formiga deve caminhar ao longo das linhas pretas do desenho abaixo do vértice *A* até o vértice *B* deslocando-se apenas um quadradinho para a esquerda ou para cima. Sabendo que a formiga não pode passar pelos vértices do quadrado preto, determine o número de caminhos diferentes que a formiga pode percorrer.



XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (OBM)
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)
PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Um número é palíndromo quando a sequência de dígitos que obtemos ao lê-lo da esquerda para a direita é a mesma que obtemos ao lê-lo da direita para a esquerda. Por exemplo, 12321 é palíndromo. Determine todos os números de dois algarismos ab tais que $ab + ba$ e $ab \times ba$ são palíndromos. Por exemplo, $12 + 21 = 33$ e $12 \times 21 = 252$ mostram que o número 12 satisfaz essas condições.

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um retângulo tal que $AD = 6$ e $DC = 8$. Construa um triângulo equilátero CED tal que E, A e B estão no mesmo semi-plano determinado pela reta CD. Determine a área do triângulo AEC.

PROBLEMA 3

No planeta *Hexaterra*, a base mais usada é a hexadecimal, base 16, ao invés da base decimal, mais usada na terra. Para compensar a diferença de dígitos entre a base 10 e a base 16, usamos letras como dígitos: A, B, C, D, E e F (escritas em ordem crescente). Assim, por exemplo, $(10)_{16}$ é na verdade $(16)_{10}$, $(AB)_{16} = 10 \times 16 + 11 \times 1 = 176$ e $(F0E)_{16} = 15 \times 16^2 + 0 \times 16 + 14 \times 1 = 3854$. Determine o valor da soma:

$$(1)_{16} + (2)_{16} + ... + (D)_{16} + (E)_{16} + (F)_{16} + (10)_{16} + ... + (100)_{16}.$$

na base 10.

PROBLEMA 4

Existem 20 cidades marcadas em uma circunferência. Um comerciante deseja percorrer as 20 cidades através de um caminho que passe por cada cidade apenas uma vez, que sempre una duas cidades através de um segmento de reta e que esses segmentos de reta percorridos entre as cidades nunca se cruzem. De quantas formas esse comerciante pode estabelecer sua rota?