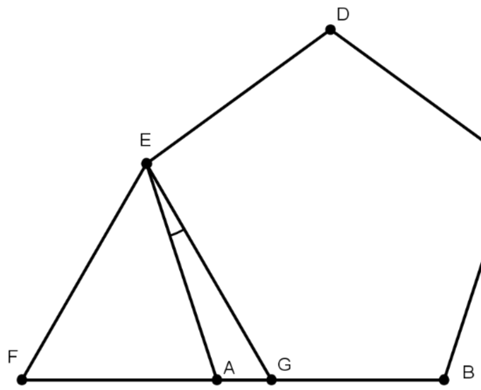
36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (OBM)
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)
PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. Na figura abaixo, *ABCDE* é um pentágono regular e *EFG* é um triângulo equilátero. Determine a medida, em graus, do ângulo *AEG*.



02. Numa sala de aula, o professor fez uma votação para ver se adiava ou não a data da prova de Matemática. Todos os alunos votaram e como resultado um terço dos alunos foi contra o adiamento e o restante a favor. Vários alunos argumentaram e o professor fez nova votação, na qual 8 alunos mudaram de opinião, de modo que 5/9 dos alunos passaram a ser contra o adiamento da prova. No máximo, quantos alunos participaram da votação?

03. A soma de 5 inteiros distintos é 1. A soma dos elementos de cada subconjunto de dois elementos desses 5 é calculada. Qual o número máximo de somas que podem ser divisíveis por 3?

04. Determine o número de soluções com x e y inteiros positivos da equação:

$$x^2 - y^2 = 36.$$

05. No super bola, o mais novo jogo de futebol, o jogador joga em temporadas. Cada temporada possui sete partidas e em cada partida o jogador pode obter 3 pontos se vencer, 1 ponto se empatar e 0 pontos se perder. De quantos modos diferentes um jogador pode obter exatamente 15 pontos em uma temporada?

06. Seja *ABCD* um quadrado de lado 4. O conjunto *S* de pontos no interior de *ABCD* tem a seguinte propriedade: todo círculo de raio 1 contido totalmente em *ABCD* contém, em sua borda ou em seu interior, pelo menos um ponto de *S*. Qual é a quantidade mínima de pontos de *S*?

36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (OBM)
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)
PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

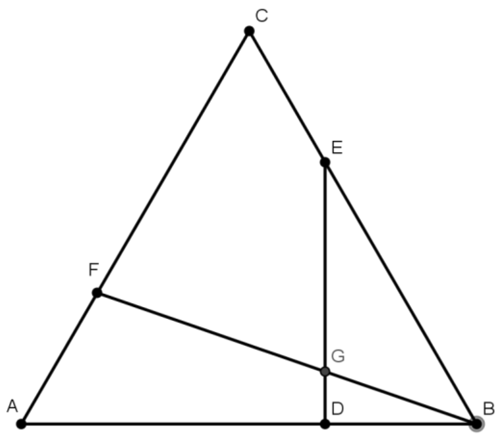
Cantor faz uma viagem eterna de carro por uma estrada infinita partindo do quilômetro zero. Sempre que Cantor completa uma quantidade inteira de quilômetros rodados ele faz uma parada. Sempre que a parada se dá sobre um número de quilômetros da forma $6k+2$, onde k é um inteiro, ele come um chocolate do tipo 1 exatamente uma vez. Sempre que a parada se dá sobre um número da forma $4t+1$, onde t é um inteiro, ele come um chocolate de tipo 2 exatamente uma vez. Sabe-se que a cada a quilômetros, ele come o chocolate do tipo 3 exatamente uma vez. Sabe-se também que a cada b quilômetros, ele come um chocolate do tipo 4 exatamente uma vez e, finalmente; a cada c quilômetros, ele come um chocolate do tipo 5 exatamente uma vez. Só existem 5 tipos de chocolates e, em cada parada, ele come exatamente um dos cinco tipos de chocolate.

a) No momento em que Cantor parar no quilômetro 2016, quantos chocolates do tipo 1 ele terá comido? E quantos chocolates do tipo 2?

b) Sabendo que o produto dos números a, b e c é 144, determine o valor de $ab + bc + ac$.

PROBLEMA 2

No desenho abaixo, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = AB/3$. Determine a razão EG/GD.



PROBLEMA 3

Considere o trinômio do segundo grau $p(x) = x^2 - x + 1$.

a) Determine o número de soluções reais distintas da equação $p(x^2) = x^2$, isto é,

$$(x^2)^2 - (x^2) + 1 = x^2.$$

b) Determine o número de soluções reais distintas da equação:

$$p(p(x)) = p(x).$$