XXXIV Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. **NENHUM PONTO** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	01	02	03	04	05
Resposta	**04**	**08**	**100**	**14**	**52 ou 0**

1. [Resposta 04]
Na figura a seguir, os números representam o número mínimo de movimentos que o cavalo deve fazer para chegar na respectiva casa. Portanto, é possível verificar que o número mínimo de movimentos para se chegar em qualquer casa do tabuleiro é 04.

2	3	2	3	4
3	2	3	2	3
2	1	4	3	2
3	4	1	2	3
	3	2	3	2

2. [Resposta 08]

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a-4}{2012}\Rightarrow\frac{a+b}{ab}=\frac{a-4}{2012}\Rightarrow a+b=2(a-4)$$

Pois $ab = 4024$. Assim,

$$8 = a - b$$

3. [Resposta 100]

O cálculo total de quanto a soma de todos os números decresce após todas as operações é:

$$1+2+3+\ldots+99$$

A diferença entre esse número e a soma total é 100 .

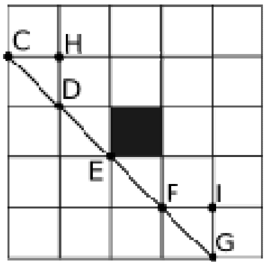
4. [Resposta 14]
Devemos ter:

$$180(n-2) > 2012 \Leftrightarrow n > \frac{2012}{180}+2 > 13{,}1$$

Sendo assim, o menor n é 14.

5. [Resposta 52]

Considere a diagonal formada pelos pontos C, D, E, F e G. Observe que qualquer caminho partindo do ponto A deve passar por um destes pontos (e por apenas um deles).



- Há uma única forma para ir de A até C. E a partir deste ponto, há 6 formas de chegar no ponto B;
- Há 4 formas para ir de A até D. Chegando ao ponto D, a formiga deve subir para o ponto H e a partir deste ponto há 5 formas de chegar no ponto B;
- A formiga não deve ir ao ponto E.
- Há 4 formas para ir de A até F. Chegando ao ponto F, a formiga deve seguir para o ponto I e a partir deste ponto há 5 formas de chegar no ponto B;
- Há uma única forma para ir de A até G. E a partir deste ponto, há 6 formas de chegar no ponto B;

Logo, existe um total de $6+4\times 5+4\times 5+6=52$ caminhos possíveis de A até B.

Observação: No enunciado da prova, a palavra "esquerda" apareceu incorretamente no lugar da palavra "direita". Assim, a formiga teria 0 possibilidade para chegar ao vértice B. Para corrigir esse equívoco, as duas respostas 0 e 52 serão consideradas corretas.

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Vejamos primeiro a propriedade da soma.

$$ab + ba = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$$

Sabemos que $1 \le a,b \le 9 \Rightarrow 2 \le a+b \le 18$. Assim, teremos múltiplos de 11 que são palíndromos entre 11.2 = 22 e 11.18 = 198. Observa-se que os únicos que servem são os de dois dígitos 22, 33, ..., 99 e 121. Para todos os outros observa-se que o dígito das unidades difere do dígitos das dezenas que é 1. Assim, $2 \le a + b \le 9$ ou $a + b = 11$.

Agora exploremos a propriedade do produto.

$$ab \times ba = (10a + b)(10b + a) = 100ab + 10a^2 + 10b^2 + ab = 101ab + 10(a^2+b^2)$$

Vejamos duas possibilidades para a quantidade de dígitos do produto.
Se o produto possui 4 dígitos, será $xyyx = 1001x + 110y$ será múltiplo de 11. Como 11 é primo, se ele dividir o produto, então dividirá um dos fatores, implicando uma das possibilidades:
$\Rightarrow$

$$11 | 10a + b \Rightarrow a = b$$
$$11 | 10b + a \Rightarrow a = b$$

Acarretando $a = b$ em ambos os casos. Assim, teríamos *aa* e sabemos que o produto deve ter 4 dígitos, logo $a \geq 3$ e $a + b = 2a$ deve satisfazer $2 \le 2a \le 9 \Rightarrow 1 \le a \le 4$ ou $2a = 11$ esta última sem solução pois 11 é ímpar. Juntando todas as condições tem-se a = 3 ou 4. Entretanto, 33 e 44 não são soluções.

Se, por outro lado, o produto possuir 3 dígitos, será $xyx = 101x + 10y$, igualando:

$$101ab + 10(a^2 + b^2) = 101x + 10y \Rightarrow 101(ab - x) = 10(y - a^2 - b^2)$$

Como $mdc(101{,}10) = 1$, sabemos que $101|(y - a^2 - b^2)$ e $10|(ab - x)$. Vejamos que os limites para o múltiplo de 101 são:

$$-2.101 < 0 - 9^2 - 9^2 \le y - a^2 - b^2 \le 9 - 1 - 1 < 101$$

Assim, $y - a^2 - b^2 = 0 \; ou - 101$, vejamos agora cada subcaso.
Se $y - a^2 - b^2 = 0$ então teremos $ab - x = 0$. Basta verificar os pares de dígitos cuja soma dos quadrados e o produto são menores que 10. São eles:

$$(a, b) = (1{,}1); (1{,}2); (2{,}1); (2{,}2)$$

Basta ver que o um dígito maior ou igual a 3 já superaria soma dos quadrados 9. Como a condição anterior para a soma é claramente satisfeita, temos os números 11, 12, 21 e 22.
Se $y - a^2 - b^2 = -101$ então $ab - x = -10$, mas $ab - x \geq 1 - 9 = -8$, então não há soluções nesse caso.
Os números são: 11, 12, 21 e 22.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Escrever os números como $10a + b$ e $10b + a$. **[1 ponto]**
b) Observar os limites de $a + b$ entre 2 e 9 ou 11. **[2 pontos]**
c) Mostrou que se o número tem quatro dígitos e é palíndromo então é múltiplo de 11. **[1 ponto]**
d) Verificou que se o produto tem quatro dígitos então os números devem ser múltiplos de 11. **[1 ponto]**
e) Concluir que 33 e 44 são soluções para esse caso. **[1 ponto]**
f) Verificou que se o produto possuir três dígitos forma-se uma equação como

$$101ab + 10\left(a^2 + b^2\right) = 101x + 10y \Rightarrow 101(ab - x) = 10\left(y - a^2 - b^2\right)$$

Ou equivalente **[2 pontos]**

g) Concluiu que nesse caso tem-se as soluções 11, 12, 21 e 22. **[2 pontos]**

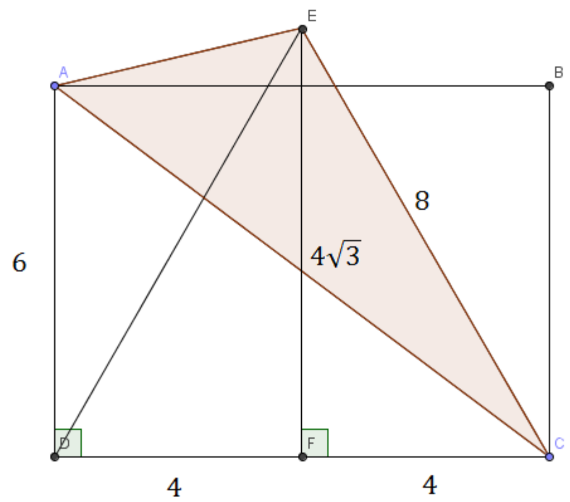
Pontuação não cumutalita:

h) Escrever números que satisfazem as propriedades sem justificativa clara.

– 1 ou 2 números **[1 ponto]**
– 3, 4 ou 5 números **[2 pontos]**
– 6 números **[3 pontos]**
– algum número citado não possui a propriedade **[0 ponto]**

i)Testou todos os números de dois dígitos e mostrou que apenas 11, 12, 21 e 22 são soluções **[10 pontos]**

PRIMEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
A figura que usaremos será:



Comecemos traçando a altura de EF relativa ao DC. Como o triângulo é equilátero, essa também será a mediana, logo $DF = FC = 4$. Usando o teorema de Pitágoras (ou o seno de 60º):
$EF^2 + CF^2 = EC^2 \rightarrow EF^2 = 64 - 16 \rightarrow EF = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Agora para achar a área do AEC, teremos:

$$\underline{Area(AEC) = Area(AECD) - Area(ACD)}$$
$$Area(AEC) = Area(AEFD) + Area(ECF) - Area(ACD)$$
$$Area(AEC) = \frac{(6+4\sqrt{3}).4}{2} + \frac{4.4\sqrt{3}}{2} - \frac{6.8}{2} = (6+4\sqrt{3}).2 + 2.4\sqrt{3} - 3.8$$
$$Area(AEC) = 12 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 24 \rightarrow Area(AEC) = 16\sqrt{3} - 12$$

SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
Sabemos que:
$$AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \rightarrow AC = 10$$

Seja $\angle ACD = \alpha$. Como $\angle ECD = 60° \rightarrow \angle ECA = 60° - \alpha$
Observando o triângulo ACD:
$$sen\ \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$$cos\ \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Para calcular a área do AEC podemos usar a fórmula:

$$Area(AEC) = \frac{EC.CA.sen\angle ECA}{2} = \frac{8.10.sen(60° - \alpha)}{2}$$
$$Area(AEC) = 40.(sen60°.cos\ \alpha - cos60°.sen\ \alpha)$$
$$Area(AEC) = 40.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{4}{5} - \frac{1}{2}.\frac{3}{5}\right) = 40.\frac{4\sqrt{3} - 3}{10} \rightarrow Area(AEC) = 16\sqrt{3} - 12$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

PRIMEIRA SOLUÇÃO:
a) Traçou a altura de E a CD. **[2 pontos]**

b) Calculou a medida dessa altura corretamente. **[3 pontos]**
c) Escreveu a área do *AEC* como resultado das somas e subtrações de outras áreas como:

$$Area(AEC) = Area(AECDB) - Area(ACD)$$

[2 pontos]
d) Calculou corretamente a área do *AEC* **[3 pontos]**

SEGUNDA SOLUÇÃO:
a) Encontrar a medida de *CD*. **[3 pontos]**
b) Escrever claramente quais eram os seno e cosseno do *ACD*. **[3 pontos]**
c) Escreveu a fórmula de área usando o seno de *ECA*. **[2 pontos]**
d) Concluiu calculando corretamente a área usando o seno da diferença. **[2 pontos]**

PRIMEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Escrevendo a soma na ordem inversa e somando com a expressão original, obtemos:

$$\begin{array}{c}(1)_{16} + (2)_{16} + \ldots (FF)_{16} + (100)_{16} = S \\ (100)_{16} + (FF)_{16} + \ldots + (2)_{16} + (1)_{16} = S \\ \hline [(100)_{16} + (1)_{16}] + [(FF)_{16} + (2)_{16}] + \ldots + [(FF)_{16} + (2)_{16}] + [(100)_{16} + (1)_{16}] = 2S\end{array}$$

A soma dos termos em cada colchete é a mesma e vale $[(100)_{16} + (1)_{16}] = 256 + 1 = 257$. Além disso, existem $(100)_{16} = 256$ tais colchetes. Sendo assim,

$$256 \cdot 257 = 2S \Rightarrow S = 32896$$

SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Somando todos os números da forma $(XY)_{16}$ com X e Y variando no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, E, F\}$ obtemos a soma $(1)_{16} + (2)_{16} + \ldots (FF)_{16} + (FF)_{16}$. Cada dígito é somado 16 vezes na posição do X e 16 vezes na posição do Y. O aparecimento do dígito X corresponde ao valor 16X na base 10. Sendo assim, essa soma vale:

$$\begin{aligned} 16 \cdot 16 \cdot (0 + 1 + \ldots + E + F) + 16 \cdot (0 + 1 + \ldots + E + F) &= \\ 272 \cdot (0 + 1 + \ldots + E + F) &= \\ 272 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} &= 32640 \end{aligned}$$

Como $(100)_{16} = 256$, a soma total vale $32640 + 256 = 32896$.

TERCEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Convertendo todos os números para a base 10, a soma se transforma em:

$$1+2+3+..+256 \ = \frac{256\cdot 257}{2} = 32896$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

PRIMEIRA SOLUÇÃO:
a) Perceber que a soma de elementos simétricos em relação ao termo central da soma é constante. **[4 pontos]**

b) Perceber que 2S é a soma de 256 ou $(100)_{16}$ termos de mesma soma. **[4 pontos]**
c) Concluir o valor correto de S. **[2 pontos]**

SEGUNDA SOLUÇÃO:
a) Perceber que ao somarmos todos os números de até dois dígitos iremos contar cada dígito exatamente 16 vezes em cada posição. **[5 pontos]**

b) Efetuar corretamente a soma dos dígitos em suas respectivas posições e obter o número 32640. **[4 pontos]**

c) Usar a soma de todos os números com até dois dígitos para concluir que a soma total é 32896 **[1 ponto]**

TERCERA SOLUÇÃO:
a) Converter todos os números para a base 10. **[2 pontos]**
b) Obter o valor da soma após a conversão. **[8 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Em qualquer momento do trajeto, o comerciante não pode percorrer um segmento de reta que deixe duas cidades não visitadas em semi-planos opostos determinados pela reta suporte do segumento pois, nesse caso, eventualmente tal segmento seria cruzado pelo caminho do comerciante. Sendo assim, em cada vértice do trajeto, o comerciante possui duas opções: ou anda em direção ao vértice mais à esquerda ainda não visitado ou anda em direção ao vértice mais à direita ainda não visitado. No início, o comerciante possui 20 opções para escolher o primeiro vértice e, em cada um dos vértices subsequentes, existem duas opções de escolhas. O número total de tais escolhas é $20\cdot 2^{19}$. Nessa contagem, cada linha poligonal que representa o

trajeto do comerciante foi contada duas vezes, um para cada um de seus extremos. Sendo assim, o total trajetos é $20 \cdot 2^{18}$.

Observação: Não ficou claro no enunciado se os trajetos do comerciante levavam em conta a ordem em que as cidades eram percorridas ou apenas seu traçado. Sendo assim, ambas as respostas $20 \cdot 2^{19}$ e $20 \cdot 2^{18}$ devem ser consideradas corretas.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Perceber que um segmento não pode separar cidades não visitadas em semi-planos opostos.
[1 ponto]

b) Perceber que em cada vértice existem duas escolhas possíveis para continuar o trajeto.
[4 pontos]

c) Concluir que existem $20 \cdot 2^{19}$ ou $20 \cdot 2^{18}$ possíveis trajetos**. [5 pontos]**