XXXV Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	0013	3125 ou 3010	0019	0036	0014

01.[Resposta: 0013]
Solução: Tome os seguintes subconjuntos de três elementos:
$\{1,2,3\}; \{4,5,6\}; \dots; \{16,17,18\}$
Temos 6 conjuntos. Se tomarmos os dois primeiros elementos de cada conjunto, teremos 12 elementos sem que hajam três consecutivos. Já se tomarmos 13 elementos, pelo princípio das casas dos pombos, tomaremos 3 elementos de um mesmo subconjunto descrito formando assim três elementos consecutivos.

02.[Resposta: 3125 ou 3010]
Houve um pequeno erro no enunciado. A segunda pista deveria ser *"tem exatamente 6 divisores"*. Por isso, aceitam-se duas respostas, uma para cada interpretação possível.

Caso seja feito com exatamente 6 divisores.
Comecemos usando a segunda pista. Se um número possui 6 divisores, então sua fatoração em números primos só pode ser da forma p^6 ou r^2s, para primos r e s distintos. Pela terceira pista, teremos os seguintes casos para analisar:

- p^5 com $p = 5$.

Neste caso, teremos o número $5^5 = 3125$, que é maior que 3001.

- r^2s com $r = 5$.

Então teremos $25.s$. Para ser maior que 3001, devemos ter $s > \frac{3001}{25} > \frac{3000}{25} = 120$. Notando que não há primos de 121 até 125, vemos que $s > 125$ e consequentemente $r^2s > 3125$. Portanto, este caso gera apenas soluções maiores que 3125.

- r^2s com $s = 5$.

Teremos o números $5.r^2$. Usando a primeira pista, devemos ter $r^2 > \frac{3001}{5} > \frac{3000}{5} = 600$. Logo, $r^2 > 24^2$, ou seja, $r \geq 25$. Mas como 25 não é primo, teríamos $r > 25$ e consequentemente $r^2s > 3125$. Então, este caso gera soluções maiores que 3125.

A senha de Abel é 3125.

Caso seja feito sem considerar exatamente 6 divisores, ou seja, possuir 6 ou mais divisores.
Observe que o número é múltiplo de 5 maior que 3001. Fazendo os testes vemos que 3005 possui apenas 4 divisores. O seguinte 3010 possui 16 divisores. Logo, nessa interpretação a senha de Abel é 3010.

03.[Resposta: 0019]

Solução: Vamos contar as potências perfeitas de 0 a 259. Veja que, basta olharmos os expoentes primos, pois se tivermos uma potência composta da forma $x.p$, com p primo, também teremos a potência de um primo uma vez que $a^{xp} = (a^x)^p$. Temos:

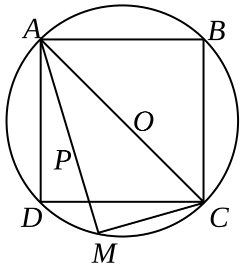
- 16 quadrados perfeitos $1^2, 2^2, \dots, 16^2$
- 6 cubos perfeitos $1^3, 2^3, \dots, 6^3$
- 3 potências quintas $1^5, 2^5$e 3^5
- 2 potências sétimas 1^7 e 2^7:

Como citado, as potências de expoentes 4, 6 e 8 já estão incluídas nas potências de 2. Note também que as potências de expoente 9 ou maior, mesmo com base 2, são maiores que 259 e, as que possuem base 1, já foram contadas.

Daí, tomando o cuidado de tirar 3 vezes o número 1, pois ele está sendo contado 4 vezes e 1 vez o número 64 que está sendo contado duas vezes (64 = $8^2 = 4^3$), concluímos a princípio que existiriam 16 + 6 + 3 + 2 – 3 – 1 = 23 possíveis horas potências distintas.

Entretanto, as potências 8^2 , 9^2 , 13^2 e 14^2 são as que possuem o número formado pelas dezenas e unidades maiores que 60, logo não são horas potências. Finalmente, temos que a quantidade de horas potências depois de 00:00 e antes de 02:59 é 23 – 4 = 19.

04.[Resposta: 0036]



Trace a diagonal *AC* que intersecta *DB* no ponto *O*. Sendo *ABCD* um quadrado, *O* é o centro da circunferência.

Observe que $\angle CMA = 90^\circ$ e $\angle POA = \angle DOA = 90^\circ$. Logo, pelo caso AA, os triângulos *AOP* e *AMC* são semelhantes e, portanto,

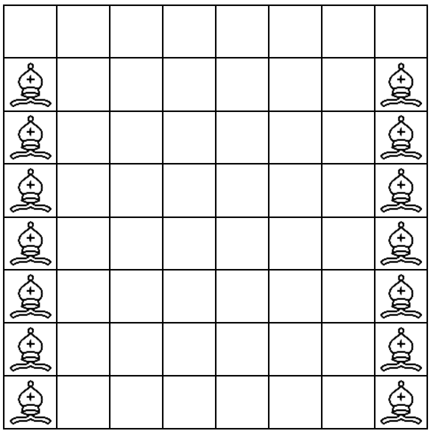
$$\frac{AP}{AC} = \frac{AO}{AM} \Leftrightarrow \frac{AP}{60} = \frac{30}{50} \Leftrightarrow AP = 36$$

05.[Resposta: 0014]

Solução: Um tabuleiro 8 × 8 pode ser dividido em 15 diagonais, como mostra a figura a seguir:

8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8

Dois bispos não podem estar na mesma diagonal; além disso, não é possível que dois bispos ocupem as casas 1 e 15. Logo, há no máximo 14 bispos. A figura a seguir mostra um exemplo com 14 bispos:



Observação: generalizando a ideia acima, prova-se que, em um tabuleiro $n \times n$, a quantidade máxima de bispos é $2n - 2$.

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

a)

linha	X	Y
1	2	1
2	2	2
3	2^2	1
4	2^2	2^2
5	2^4	1
6	2^4	2^4
7	2^8	1
8	2^8	2^8
9	2^{16}	1
10	2^{16}	2^{16}

b) Vemos, na tabela acima, que os expoentes de 2 nas linhas 2, 4, 6, 8 e 10 são, respectivamente 1, 2, 4, 8 e 16, isto é, dobram a cada duas linhas. Assim, na linha de número 2*n*, o expoente de 2 é 2^{n-1}. Portanto, na linha 20, o expoente de 2 é 2^9, isto é, $X = Y = 2^{2^9}$. Portanto, na linha 21, o expoente de 2 é

$$2^{2^9}.2^{2^9} = 2^{2^9+2^9} = 2^{2.2^9} = 2^{2^{10}}.$$

Logo, na linha 21, teremos a soma: $X + Y = 2^{2^{10}} + 1$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Item a: **[+ 4 pontos]**
- Erros na conta da conclusão do item a: **[–1 ponto]**

- Item b: **[+ 6 pontos]**
- Erros na conta da conclusão do item b: **[–1 ponto]**

Observação: O aluno que preencher corretamente até a linha 21 e achar a resposta deve receber todos os pontos do item b.

Pontuações não acumulativas: (as pontuações de cada critério extra abaixo não podem ser somadas com as pontuações de cima e nem entre si)

Critério extra A)
- No item a, achar corretamente até a linha 8 ou 9.**[+3 pontos]**

Critério extra B)
- No item a, achar corretamente até a linha 6 ou 7.**[+2 pontos]**

Critério extra C)
- Afirmar, sem prova, que na linha *2k - 1* estão escritos os números $2^{2^{k-1}}$ e 1 nas colunas *X* e *Y*, respectivamente. **[+3 pontos]**
- Afirmar, sem prova, que na linha *2k* está escrito o número $2^{2^{k-1}}$ nas duas colunas **[+3 pontos]**

PROBLEMA 2:

Como $2013 = 3.11.61$, cada um desses primos deve aparecer na fatoração de exatamente um dos quatro números *x*,*y*,*z* e *w*. Temos 4 opções para escolher em que número da quádrupla o primo irá aparecer, portanto, o número de quádruplas é $4^3 = 64$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

• Escrever 2013 = 3.11.61. **[3 pontos]**

• Perceber que cada um dos primos que dividem 2013 deve aparecer em exatamente um dos quatro números x, y, z e w. **[5 pontos]**

• Concluir corretamente. **[2 pontos]**

Pontuações não acumulativas: (as pontuações de cada critério abaixo não podem ser somadas com as pontuações de cima)

• Encontrar:

-uma solução correta. **[1 ponto]**

-duas soluções corretas com permutações diferentes. **[2 pontos]**

Observação: Por exemplo, as soluções (x, y, z, w) = (1, 1, 1, 2013) e (x, y, z, w) = (2013, 1, 1, 1) dever ser consideradas, para esse critério, as mesmas, pois uma nada mais é do que uma permutação da outra.

• Notar que o fato de 2013 ter 3 fatores primos e na questão haver 4 variáveis inteiras implica necessariamente que pelo menos uma das variáveis será igual a 1 **[3 pontos]**

PROBLEMA 3:
Suponha que, após abrir C caixas, Led ainda não consiga abrir o portal. Isso significa que há pelo menos uma chave que ele não possui.

Então, as caixas que ele abriu possuíam pares de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados. Logo, teremos $C \leq \binom{9}{2} = \frac{9.8}{2} = 36$. De fato, se ele abrir caixas que possuem todos os pares das chaves de um conjunto de 9 cadeados ele não conseguirá abrir o portal.

Por outro lado, nota-se também que se Led abrir 37 caixas distintas, saberemos que suas chaves não poderão ser um subconjunto de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados, pois é maior que 36.

Então, o número mínimo de caixas que Led deve abrir é 37.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Verificar que Led não conseguirá abrir o portal se os pares de chaves obtidas formarem um subconjunto de chaves capaz de abrir não mais que 9 cadeados. **[3 pontos]**

- Perceber que existem no máximo 36 caixas com pares de chaves capazes de abrir um conjunto fixado qualquer contendo 9 cadeados. **[5 pontos]**

- Concluir que abrindo 37 caixas ele poderá abrir o portal. **[2 pontos]**

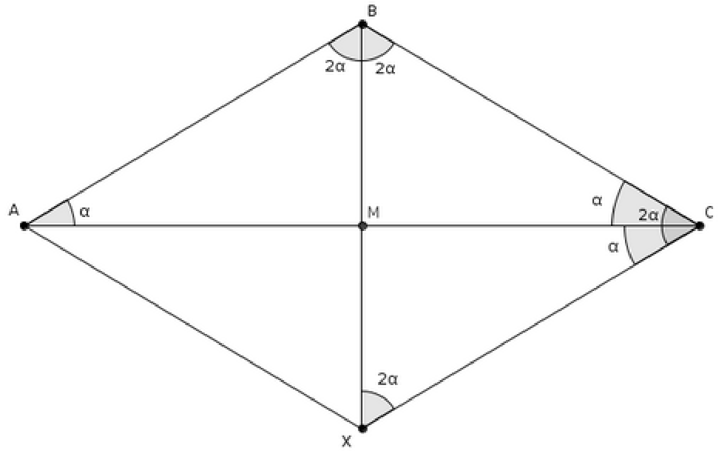
Pontuação não acumulativa: (a pontuação do critério abaixo não pode ser somada com as pontuações de cima)

Resolver corretamente a questão para algum caso menor com $n \geq 4$ cadeados e mostrar que é necessário fazer a abertura de pelo menos $\binom{n-1}{2} + 1$ caixas. **[3 pontos]**

PROBLEMA 4:

Solução 1:

Sejam α o valor do ângulo $\angle BAC$ e X o simétrico de B em relação à M, ou seja, $AXCB$ é um paralelogramo.



Como $BC = 2.BM$, temos que o ΔBXC é isósceles em B e, por conseguinte, $\angle BCX = \angle BXC = \angle ABM = 2\alpha$

Partindo de $\angle MCX = \angle BAM = \alpha$, temos que$\angle ACB = \angle BCX - \angle MCX = 2\alpha - \alpha = \alpha$.

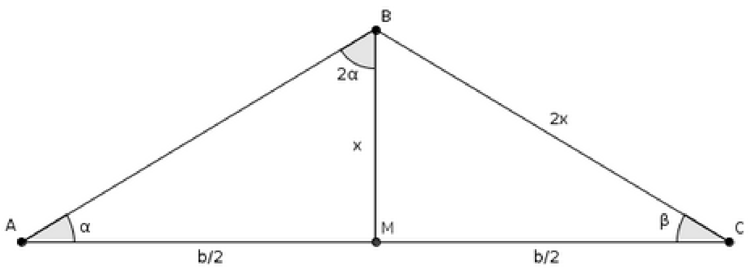
Por outro lado, de $\angle MCX = \angle BAM = \alpha$ temos que o ΔABC é isósceles em B. Sabendo que BM é mediana, também temos que $\angle MBC = \angle MBA = 2\alpha$.

Analisando os ângulos do triângulo ABC, temos vemos $\alpha + 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$ e consequentemente $\alpha = 30°$.

Assim, os ângulos do triângulo ABC são $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 120°$ e $\angle ACB = 30°$. Logo, o maior ângulo é $120°$.

Solução 2:

Sejam α o valor do ângulo$\angle BAC$ e β o valor do ângulo $\angle BCA$. Sejam b e x os comprimentos dos lados AC e BM, respectivamente. Pelo enunciado, $\angle ABM = 2\alpha$ e $BC = 2x$.



Por lei dos senos no ΔABM, temos:

$$\frac{AM}{sen\ 2\alpha} = \frac{BM}{sen\ \alpha} \rightarrow \frac{\frac{b}{2}}{sen\ 2\alpha} = \frac{x}{sen\ \alpha} \rightarrow \frac{b}{2x} = \frac{sen\ 2\alpha}{sen\ \alpha}\ (I)$$

Novamente, usando lei dos senos no ΔABC, temos que:

$$\frac{AC}{sen(180° - \alpha - \beta)} = \frac{BC}{sen\ \alpha} \rightarrow \frac{b}{sen(\alpha+\beta)} = \frac{2x}{sen\ \alpha} \rightarrow \frac{b}{2x} = \frac{sen(\alpha+\beta)}{sen\ \alpha}\ (II)$$

Juntando as equações (I) e(II), temos que:$sen\ 2\alpha = sen(\alpha+\beta)$. Daí, separamos em dois casos:

Caso 1:$2\alpha = \alpha + \beta \rightarrow \alpha = \beta$.
Neste caso, concluímos que ΔABCé isósceles em B. Sabendo que BM é mediana, temos $\angle MBC = \angle MBA = 2\alpha$.

Segue o final da solução 1, ou seja, $\alpha = 30°$ e os ângulos do triângulo *ABC* são $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 120°$ e $\angle ACB = 30°$. Logo, o maior ângulo é $120°$.

Caso 2: $2\alpha + \alpha + \beta = 180° \rightarrow\ 3\alpha + \beta = 180°$
Observando a soma dos ângulos do ΔABC, temos que:

$$\angle BAC + \angle MBA + \angle MBC + \angle BCA = 180°$$
$$\rightarrow 2\alpha + \alpha + \angle MBC + \beta = 180° \rightarrow \angle MBC = 0°.$$

Portanto, este caso não pode acontecer.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Para solução 1:
- Construir o ponto X no prolongamento de BM de forma que $AXCB$ é um paralelogramo. **[4 pontos]**
- Perceber que o ΔBXC é isósceles em B. **[1 ponto]**
- Calcular o valor do ângulo $\angle BAC$ corretamente. **[4 pontos]**
- Concluir corretamente o valor do maior ângulo do ΔABC **[1 ponto]**

Pontuação não acumulativa: (A pontuação abaixo não deverá ser somada com as pontuações acima)

- Construir o ponto *X* no prolongamento de *BM* de forma que *BM* = *MX*, sem perceber que *AXCB* é um paralelogramo **[2 pontos]**

Para solução 2:
- Aplicar lei dos senos no ΔABM. **[2 pontos]**
- Aplicar lei dos senos no ΔABC. **[2 pontos]**
- Encontrar a equação $sen2\alpha = sen(\alpha+\beta)$. **[1 ponto]**
- Resolver o caso$2\alpha = \alpha + \beta \rightarrow\ \alpha = \beta$ corretamente. **[2 pontos]**
- Resolver o caso $2\alpha + \alpha + \beta = 180° \rightarrow\ 3\alpha + \beta = 180°$ corretamente, provando que tal caso produz uma solução. **[2 pontos]**

• Concluir corretamente o valor do maior ângulo do ΔABC. **[1 ponto]**

Observação: Se o aluno conseguiu encontrar corretamente que $sen 2\alpha = sen(\alpha + \beta)$ de outra forma, então os três primeiros critérios que valem **[5 pontos]** devem ser dados.