XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)
PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

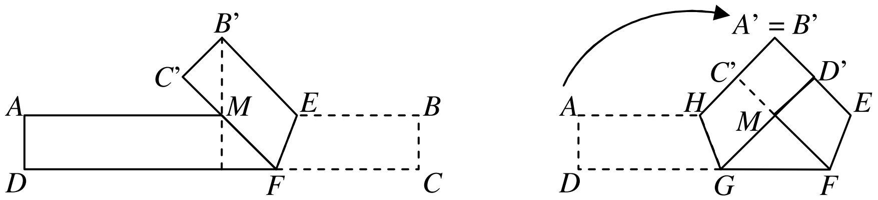
01. Arnaldo pensou em um número de quatro dígitos e desafiou Bernardo a descobrir qual era o número. Para tanto, passou as seguintes três dicas para Bernardo, sendo que exatamente uma das dicas é falsa.

- *Dica* 1: O número é um cubo perfeito;
- *Dica* 2: O número é o menor número de quatro dígitos que possui quatro divisores positivos;
- *Dica* 3: O número é múltiplo de 59.

Qual o número pensado por Arnaldo?

02. Sendo a, b, c reais tais que $ab(a + b + c) = 1001$, $bc(a + b + c) = 2002$ e $ca(a + b + c) = 3003$, encontre abc.

03. Uma tira retangular de papel *ABCD* é dobrada ao longo das linhas *EF* e *HG* de forma tal que os vértices *A* e *B* são levados para um mesmo ponto *A*' da mediatriz do segmento *AB* e o ângulo $\angle HA'E$ é reto. Obtém-se assim o pentágono *A*'*EFGH*.



Sabe-se que as bordas inferiores da tira (segmentos *FC*' e *GD*' na figura) se cortam no ponto médio *M* do lado *AB*. O lado menor da tira mede 1 e a medida do lado maior mede $a + \sqrt{b}$, com *a* e *b* inteiros positivos. Quanto é $a + b$?

04. Os dois menores números primos da forma $n^2 + 5$ são $6^2 + 5 = 41$ e $12^2 + 5 = 149$. Qual é o terceiro menor primo dessa forma?

05. Dois círculos se cortam em dois pontos *A* e *B*. Seja *X* um ponto sobre o segmento *AB*. Dez retas, todas passando por *X*, cortam os círculos em um total de quarenta pontos, quatro para cada reta. Qual é a quantidade mínima de quadriláteros cíclicos cujos quatro vértices estão entre esses quarenta pontos?

Obs: *um quadrilátero é cíclico se, e somente se, existe um círculo que passa por seus quatro vértices.*

XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)
PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são reais e $a > 0$. Suponha que esta equação tenha duas raízes reais r e s tais que $0 < r < 1$ e $0 < s < 1$. Mostre que $b + c < 0$.

PROBLEMA 2

No triângulo ABC, seja AD a altura relativa a BC. Quantos triângulos não congruentes satisfazem $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2}$ com $AD = 2012$ e BD e CD ambos inteiros? Note que AB e AC não precisam ser inteiros.

PROBLEMA 3

Sejam $ABCD$ um quadrado, E o ponto médio do lado BC, F o ponto médio do lado CD. Constroem-se os triângulos equiláteros ABG e BEH de forma que G está no interior do quadrado, e H no seu exterior. Determine o ângulo agudo entre as retas BF e GH.

PROBLEMA 4

Esmeralda e Jade, secretárias da OBM, jogam *Destrua os triângulos*. Esse jogo é disputado da seguinte forma: tem-se uma esfera e 2012 pontos sobre a esfera. Em princípio todos os pares de pontos estão ligados por um segmento. Esmeralda e Jade apagam, alternadamente, um segmento. A secretária que eliminar o último triângulo da esfera vence o jogo. Note que podem sobrar segmentos no final do jogo; eles só não formam triângulo.

Se Esmeralda começa o jogo, qual das secretárias tem estratégia vencedora, ou seja, vence o jogo não importando como o oponente jogue? Justifique sua resposta, exibindo uma estratégia que funcione sempre.