XXXIV Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	1003	0546	0012	1301	9780

01. [Resposta: 1003]
Solução: Suponha que as dicas 1 e 3 sejam ambas verdadeiras. Então número é cubo perfeito e múltiplo de 59. Mas 59 é primo, de modo que é múltiplo de $59^3 > 10000$, o que não é possível. Assim, a dica 2 está correta.

Utilizaremos o fato de que um número cuja fatoração em primos é $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ tem $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_k + 1)$ divisores positivos. Um número tem quatro divisores positivos se, e somente se, é da forma pq ou p^3, p,q primos. Note que $1000 = 2^3\cdot 5^3$ tem $4\cdot 4 = 16$ divisores positivos; $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$ tem $2\cdot 2\cdot 2 = 8$ divisores positivos; $1002 = 2\cdot 3\cdot 167$ tem 8 divisores positivos; $1003 = 17\cdot 59$ tem $2\cdot 2 = 4$ divisores positivos. Assim, o número pensado por Arnaldo é 1003.

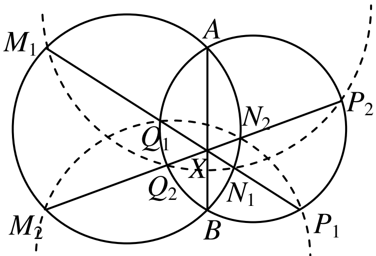
02. [Resposta: 0546]
Solução: Temos $abc(a + b + c) = 1001c = 2002a = 3003b$, de modo que $c = 2a = 3b$. Assim, $a = c/2$ e $b = c/3$, de modo que $ab(a + b + c) = 1001 \Leftrightarrow ab(c/2 + c/3 + c) = 1001 \Leftrightarrow abc = 546$.

03. [Resposta: 0012]
Solução: Veja que $B'M = MF = \sqrt{2}$. Se N denota o ponto médio do lado DC, ainda temos $NF = 1$. Daí, $CD = DN + NF + FM + MC' = 2\cdot(NF + FM + MC') = 2\cdot(1 + \sqrt{2} + 1) = 4 + 2\sqrt{2} = 4 + \sqrt{8}$, e $a = 4$ e $b = 8$.

04. [Resposta: 1301]
Solução: Primeiro note que se n é ímpar então $n^2 + 5$ é par e maior do que 2, ou seja, não é primo. Logo n é par. Além disso, se $n = 3k \pm 1$, $n^2 + 5 = 9k^2 \pm 6k + 6$ é múltiplo de 3 e maior do que 3, ou seja, não é primo. Logo n é múltiplo de 3, e portanto é múltiplo de 6. Assim, os próximos candidatos a primo são $18^2 + 5 = 18^2 – 3^2 +14 = (18 – 3)(18 + 3) + 14 = 15\cdot 21 + 14$ e $24^2 + 5 = 24^2 – 3^2 + 14 = (24 – 3)(24 + 3) + 14 = 21\cdot 27 + 14$, mas ambos são múltiplos de 7. O número $30^2 + 5$ é múltiplo de 5. O próximo número a ser testado é $36^2 + 5 = 1301$. Verifica-se que esse número é primo (basta verificar todos os primos até 36, ou seja, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31; vendo módulo cada um desses primos, obtemos 5, 5, 1, $1^2 + 5 = 6$, $3^2 + 5 = 14$, $(–3)^2 + 5 = 14$, $2^2 + 5 = 9$, $(–2)^2 + 5 = 9$, $(–10)^2 + 5 = 105$, $7^2 + 5 = 54$ e $5^2 + 5 = 30$).

05. [Resposta: 9780]

Solução: Considere duas das dez retas r_1 e r_2. Cada reta r_i corta um círculo em M_i e N_i e o outro em P_i e Q_i.



A potência de X em relação aos círculos é $XM_1 \cdot XN_1 = XP_1 \cdot XQ_1 = XA \cdot XB$ e $XM_2 \cdot XN_2 = XP_2 \cdot XQ_2 = XA \cdot XB$, respectivamente. Logo temos $XM_1 \cdot XN_1 = XP_2 \cdot XQ_2$ e $XM_2 \cdot XN_2 = XP_1 \cdot XQ_1$, de modo que os quadriláteros $M_1Q_2N_1P_2$ e $M_2Q_1N_2P_1$ são cíclicos. Logo qualquer par de retas determina pelo menos dois quadriláteros cíclicos que não estão inscritos em nenhuma das duas circunferências. Contando com os quadriláteros inscritos na circunferência, temos como total no mínimo $2\binom{20}{4} + 2\binom{10}{2} = 2\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} + 2\frac{10 \cdot 9}{2} = 9780$ quadriláteros cíclicos. Além disso, pode-se exibir exemplos com exatamente 9780 quadriláteros cíclicos.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

Temos $r+s=-\frac{b}{a} \Leftrightarrow b=-a(r+s)$ e $rs=\frac{c}{a} \Leftrightarrow c=ars$, logo $b + c = a(rs - r - s) = a((1 - r)(1 - s) - 1) < 0$, pois $0 < 1 - r < 1$ e $0 < 1 - s < 1$, de modo que $(1 - r)(1 - s) < 1$.
Outra maneira de provar que $rs - r - s < 0$ é notar que $rs - r - s = -r(1 - s) - s < 0$ pois $1 - s > 0$ e $-s < 0$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Escreveu $b + c$ em função de a, r e s: **[+ 3 pontos]**
- Mostrou que $rs - r - s$ é negativo: **[+ 7 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
- Substituiu qualquer dos parâmetros por valores particulares: **[0 ponto]**
- Só escreveu as relações $r+s=-\frac{b}{a}$ e $rs=\frac{c}{a}$: **[0 ponto]**
- Supôs, sem perda de generalidade, $a = 1$: **[0 ponto]**

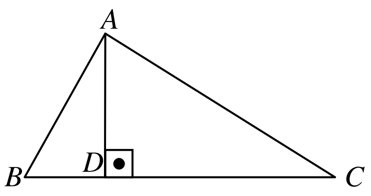
PROBLEMA 2:

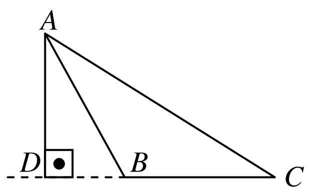
Temos $AB^2 = BD^2 + AD^2$ e $AC^2 = CD^2 + AD^2$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $BD \le CD$. Substituindo na equação, temos

$$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{BD^2+AD^2}=\frac{1}{AD^2}-\frac{1}{CD^2+AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{BD^2+AD^2}=\frac{CD^2}{AD^2(CD^2+AD^2)}$$

$$\Leftrightarrow AD^2(CD^2+AD^2)=CD^2(BD^2+AD^2) \Leftrightarrow AD^2 = BD\cdot CD$$

Ou seja, $BD\cdot CD = 2012^2$. Como $BD \le CD$ e $2012^2 = 2^4\cdot 503^2$ tem $(4 + 1)(2 + 1) = 15$ divisores positivos, BD tem 8 possíveis valores, sendo que em um deles, $BD = CD = 2012$. Com exceção desse caso, há dois triângulos que satisfazem essa condição, um com $BC = BD + CD$ e ângulo $m(A\hat{B}C)$ agudo (de fato, nesse caso ABC é retângulo em A) e outro com $BC = CD - BD$ e $m(A\hat{B}C)$ obtuso.





Com isso, o total de triângulos pedido é $7\cdot 2 + 1 = 15$.

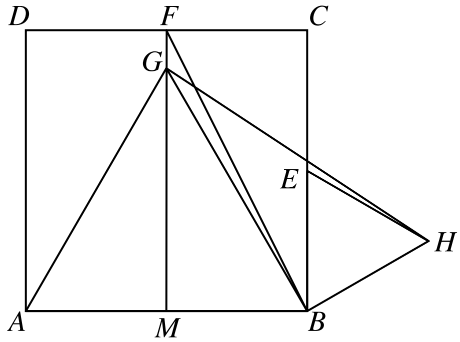
CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obteve $BD\cdot CD = 2012^2$: **[+ 2 pontos]**
- Mostrou que $BD\cdot CD = 2012^2$ tem 8 soluções não ordenadas $\{BD, CD\}$: **[+ 5 pontos]**
- Mostrou que cada solução com $BD \ne CD$ gera dois triângulos: **[+ 2 pontos]**
- Concluiu: **[1 ponto]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Somente exibiu alguns exemplos, como o triângulo com $CD = BD = 2012$: **[0 ponto]**
- Obteve 15 soluções (BD, CD) mas não percebeu que soluções simétricas geram o mesmo triângulo nem estudou os casos que geram duas soluções: **[6 pontos]**
- Esqueceu que $BD = CD$ não gera duas soluções, mas fez o resto: **[9 pontos]**
- Só a resposta: **[0 ponto]**

PROBLEMA 3:
Seja M o ponto médio do lado AB.



Note que $m(G\hat{B}H) = m(G\hat{B}E) + m(E\hat{B}H) = (90^\circ - m(G\hat{B}A)) + 60^\circ = 90^\circ - 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ e $BG = AB = BC = 2\cdot BE = 2\cdot BH$. Além disso, no triângulo BMF, $m(B\hat{M}F) = 90^\circ$ e $MF = 2\cdot MB$. Logo os triângulos GBH e FMB são semelhantes pelo caso LAL, com a mesma orientação. Portanto o ângulo entre as retas BF e GH é o mesmo que o ângulo entre as retas BG e MF, que é $m(B\hat{G}M) = 30^\circ$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Mostrou que o triângulo GBH é retângulo: **[+ 3 pontos]**
- Mostrou que os triângulos GBH e FMB são semelhantes: **[+ 4 pontos]**
- Concluiu: **[+ 3 pontos]**

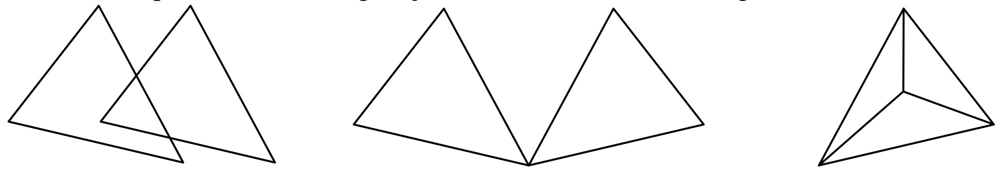
As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores, mas se acumulam entre si:

- Para soluções envolvendo geometria analítica, complexos ou trigonometria: marcar as coordenadas de **todos** os pontos de A a H vale **[2 pontos]**, encontrar o coeficiente angular de BF vale **[+ 2 pontos]** e encontrar coeficiente angular de GH vale **[+ 3 pontos]**; concluir vale **[+ 3 pontos]**.
- Só a resposta: **[0 ponto]**

PROBLEMA 4:

Antes da última jogada, há somente um triângulo ou vários triângulos com um segmento em comum, além de possivelmente outros segmentos que não participam de triângulos. Chamemos essas configurações de *vencedoras*.

Se o jogador recebe uma configuração que contém uma das configurações a seguir e mais segmentos, o jogador pode retirar algum desses segmentos e devolver outra configuração que contém a mesma configuração. Essas configurações têm pelo menos dois triângulos e não são vencedoras. Note que todas as configurações têm exatamente seis segmentos.



Considere então a configuração imediatamente anterior à *penúltima* jogada da partida. Todas tais configurações devem ter pelo menos dois triângulos; dois triângulos têm as seguintes possibilidades: sem lados nem vértices em comum; exatamente um vértice em comum; ou um lado em comum. Os dois primeiros casos correspondem às duas primeiras figuras acima; o segundo caso; caso não existam dois triângulos em uma dessas duas condições, todo par de triângulos tem um lado em comum; isso só ocorre se todos têm um lado em comum (o que é uma configuração vencedora, que não pode aparecer na penúltima jogada) ou aparece a configuração da direita (se um triângulo não tem o mesmo lado comum com os outros então tem dois lados diferentes em comum com dois outros triângulos, que têm um lado em comum). Logo toda configuração não vencedora contém pelo menos uma das configurações acima, de modo que a configuração imediatamente anterior à penúltima jogada é uma das três configurações acima.

Todas essas configurações têm 6 segmentos. Com isso, o jogador que tem a estratégia vencedora depende da paridade da quantidade de segmentos retirados até então, que é $\binom{2012}{2}-6$. Ou seja, se $\binom{2012}{2}$ é par Jade vence e se $\binom{2012}{2}$ é ímpar Esmeralda vence. Como $\binom{2012}{2}=\frac{2012\cdot 2011}{2}=1006\cdot 2011$ é par, Jade vence.

Observação: generalizando o jogo para n vértices, temos que Jade jogador vence se $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$ *e que Esmeralda vence se* $n = 4k + 2$ *ou* $n = 4k + 3$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Mostrou que na penúltima jogada sobram 6 segmentos: **[+ 8 pontos]**
- Calculou a paridade de $\binom{2012}{2}$ e concluiu: **[+ 2 pontos; só dar essa pontuação se houve algum progresso em relação ao item anterior]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as acima e nem entre si.

- Obteve todas as configurações vencedoras: **[2 pontos]**
- **Só** calculou a paridade de $\binom{2012}{2}$: **[0 ponto]**
- Argumentos de simetria incompletos: **[0 ponto]**
- Fez casos pequenos (trocando 2012 por números menores) : **[0 ponto]**