35ª Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

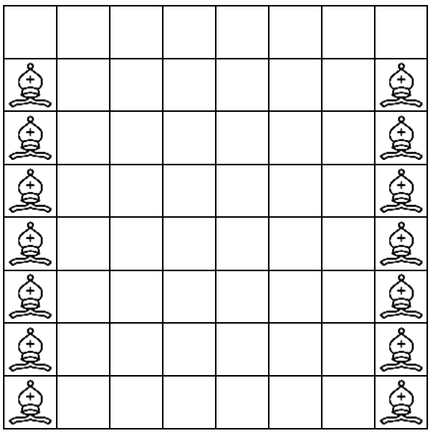
Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	0018	0014	0008	0096	1409

01. [Resposta: 0018]
Solução: Sejam $a < b$ os lados do retângulo. Então $2(a + b) = ab = n$, e $ab - 2a - 2b = 0$ é equivalente a $(a - 2)(b - 2) = 4$. Como a e b são diferentes, $a - 2 = 1$ e $b - 2 = 4$, de modo que $a = 3$ e $b = 6$, e $n = 2(3 + 6) = 18$.

02. [Resposta: 0014]
Solução: Um tabuleiro 8×8 pode ser dividido em 15 diagonais, como mostra a figura a seguir:

8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8

Dois bispos não podem estar na mesma diagonal; além disso, não é possível que dois bispos ocupem as casas 1 e 15. Logo há no máximo 14 bispos. A figura a seguir mostra um exemplo com 14 bispos:



Observação: generalizando a ideia acima, prova-se que, em um tabuleiro $n \times n$, a quantidade máxima de bispos é $2n - 2$.

03. [Resposta: 0008]
Solução: Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)=1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)=2-\frac{\pi^2}{6}.$$

Sendo A e B inteiros positivos, $A = 2$ e $B = 6$, de modo que $A + B = 8$.

04. [Resposta: 0096]
Solução: Contemos os fatores primos que podem aparecer entre 1 e 20:

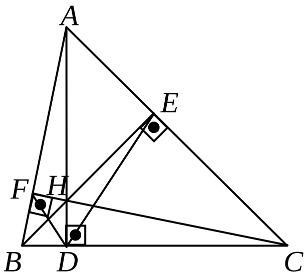
- 10 + 5 + 2 + 1 = 18 fatores 2 (10 pares, 5 múltiplos de 4, 2 múltiplos de 8 e 1 múltimplo de 16);
- 6 + 2 = 8 fatores 3 (6 múltiplos de 3 e 2 múltiplos de 9);
- 4 fatores 5;
- 2 fatores 7;
- 1 de cada um dos fatores 11, 13, 17 e 19.

Ao fazermos o produto de 15 números entre 1 e 20, deixamos 5 números de fora. Assim, existem subconjuntos X_i, i = 5, 7, 11, 13, 17 e 19, tais que $p(X_i)$ não têm fator i (deixamos todos os múltiplos de i de fora). Em compensação, há pelo menos 6 – 5 = 1 múltiplo de 3 e 10 – 5 = 5 múltiplos de 2. É possível fazer com que cada múltiplo de 3 tenha somente um fator 3 (escolhemos só o 3, por exemplo) e cada múltiplo de 2 tenha somente um fator 2 (escolhemos 2, 6, 10, 14 e 18). Logo o mdc pedido é $2^5\cdot 3 = 96$.

05. [Resposta: 1409]
Solução: Primeiro, considere o seguinte lema:

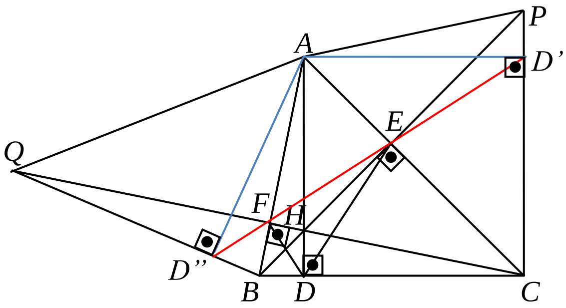
Lema: As alturas AD, BE e CF do triângulo acutângulo ABC são as bissetrizes internas de seu triângulo órtico.

Demonstração: Mostraremos que $\angle ADE = \angle ADF$, ou seja, que AD é bissetriz interna de $\angle EDF$. Com isso e os resultados análogos, o lema segue.



Para tanto, basta notar que o quadrilátero $DHEC$, em que H é o ortocentro de ABC, é cíclico, já que os ângulos $\angle CDH$ e $\angle CEH$ são retos. Com isso, $\angle ADE = \angle HDE = \angle HCE = \angle ACF$ = $90^\circ - \angle A$. Analogamente, $\angle ADF = 90^\circ - \angle A$, e o resultado segue.

Agora, voltemos ao problema. Sejam P e Q as reflexões de B e C em relação a AC e AB, respectivamente. Note que os triângulos ABQ, ABC e APC são congruentes.



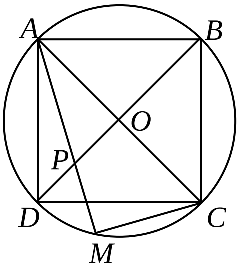
Sejam *AD*' e *AD''* as alturas relativas a *A* nos triângulos *APC* e *ABQ*, respectivamente. Pelo lema, temos $\angle PED' = \angle BED = \angle BEF$, de modo que *D'*, *E* e *F* são colineares, e pela simetria, *D'E* = *DE*. Analogamente, *D''* está na reta *EF* também e *D''F* = *DF*. Portanto o perímetro de *DEF* é *DE* + *EF* + *DF* = *D'E* + *EF* + *D''F* = *D'D''*. Assim, basta calcular o comprimento do segmento *D'D''*.

No triângulo *D'AD''*, temos *AD'* = *AD''* = *AD* e $\angle D'AD'' = \angle D'AC + \angle A + \angle D''AB = \angle DAC + \angle A + \angle DAB = 2\angle A$. Logo, dividindo o triângulo isósceles *D'AD''* em dois triângulos retângulos congruentes, temos *D'D''* = 2*AD*sen*A*.

Agora note que o triângulo *ABC* é a união de dois triângulos retângulos *ABD* e *ACD* com lados 5, 12, 13 e 9, 12, 15, respectivamente. Logo *AD* = 12 e a área do triângulo *ABC* é $\frac{14\cdot 12}{2} = 84$.
Logo $\frac{AC \cdot AB \cdot \text{sen } A}{2} = 84 \Leftrightarrow \text{sen } A = \frac{168}{13\cdot 15}$ e o perímetro de *DEF* é *D'D''* = $2\cdot 12 \cdot \frac{168}{13\cdot 15} = \frac{1344}{65}$, de modo que a soma pedida é 1344 + 65 = 1409.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:



Trace a diagonal AC que intersecta DB no ponto O. Sendo $ABCD$ um quadrado, O é o centro da circunferência.

Observe que $\angle CMA = 90^\circ$ e $\angle POA = \angle DOA = 90^\circ$. Logo, pelo caso AA, os triângulos AOP e AMC são semelhantes e, portanto,

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AO}{AM} \Leftrightarrow \frac{AP}{60} = \frac{30}{50} \Leftrightarrow AP = 36$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Provou que AOP e AMC são semelhantes ou que $COPM$ é cíclico: **[+ 5 pontos]**
- Concluiu: **[+ 5 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Marcou ou citou que $\angle CMA = 90^\circ$: **[1 ponto]**
- Obteve uma equação ou um sistema de equações que permita calcular AP: **[4 pontos]**
- Erros de conta na conclusão: **[–1 ponto]**
- Só a figura, mesmo com ângulos relevantes marcados: **[0 ponto]**

PROBLEMA 2:
Suponha que vamos usar x heptaminós e y octaminós. Então para cobrir tudo, temos $7x + 8y = 112$. Mas $112 = 2 \cdot 7 \cdot 8$ é múltiplo de 7 e de 8, logo $7x = 112 - 8y = 8(14 - y)$ é múltiplo de 8 e $8y = 112 - 7x = 7(16 - x)$ é múltiplo de 7. Como 7 e 8 são primos entre si, x é múltiplo de 8 e y é múltiplo de 7. Sendo $x = 8t$ e $y = 7u$, temos $7 \cdot 8t + 8 \cdot 7u = 112 \Leftrightarrow t + u = 2$. Assim, os valores de (t,u) são (0,2), (1,1) e (2,0), que correspondem a (x,y) sendo (0,14), (8,7) e (16,0).

Caso 1: $(x,y) = (0,14)$: apenas uma maneira de cobrir, já que todas as peças são octaminós.
Caso 2: $(x,y) = (8,7)$: temos no total $8 + 7 = 15$ peças que colocaremos no tabuleiro. Lembrando que elas vão ser colocadas uma seguida da outra, sem deixar "buracos" e que elas são de cores distintas, temos apenas que escolher as posições na ordem em que colocaremos os heptaminós. Sendo assim há $\binom{15}{8} = 6435$ preenchimentos nesse caso.
Caso 3: $(x,y) = (16,0)$: análogo ao caso 1, apenas uma maneira.
Logo, no total temos $\binom{15}{8} + 2 = 6437$maneiras de cobrir completamente o tabuleiro.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Obteve a equação $7x + 8y = 112$: **[+ 1 ponto]**
- Mostrou que x é múltiplo de 8 e y é múltiplo de 7: **[+ 3 pontos]**
- Dividiu o problema em até três casos: **[+ 2 pontos]**
- Concluiu: **[+ 4 pontos; 1 ponto por caso, 1 pela conclusão]**
- **Observação**: Não é necessário calcular $\binom{15}{8} = 6435$; isto é, uma solução completa que obtém $\binom{15}{8} + 2$ (ou $\binom{15}{7} + 2$, que dá no mesmo) como resposta deve receber 10 pontos.

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
- Obteve uma recursão do tipo $a_n = a_{n-7} + a_{n-8}$, incluindo os 8 valores iniciais: **[1 ponto]**
- Usou a recursão e obteve a_{112} incorretamente (isto é, errou conta): **[no máximo 6 pontos]**
- Listou casos: **[0 ponto]**
- Só a resposta: **[0 ponto]**

PROBLEMA 3:

Seja $S = x + y + z + w$. Então o sistema é equivalente a $-x^3 + x = -y^3 + y = -z^3 + z = -w^3 + w = S$. Fixando S, temos que x, y, z e w são soluções da equação de terceiro grau $t^3 - t + S = 0$, que tem no máximo 3 raízes. Logo pelo menos dois dos números x, y, z, w são iguais. Consideremos então os seguintes casos:

• $\boldsymbol{x = y = z = w}$: substituindo no sistema, temos a equação $-x^3 = 3x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = -3$. Logo a única solução nesse caso é (0,0,0,0).

• $\boldsymbol{x = y = z = a}$ **e** $\boldsymbol{w = b \neq a}$. Nesse caso, obtemos o sistema $-a^3 = 2a + b$ e $-b^3 = 3a$. Substituindo $a = -b^3/3$, obtemos $b^9/27 = -2b^3/3 + b$. Se $b = 0$, obtemos $a = b = 0$, o que não é possível. Logo o sistema é equivalente a $a = -b^3/3$ e $b^8 + 18b^2 - 27 = 0$. A função $f(x) = x^8 + 18x^2 - 27$ é par (isto é, $f(-x) = f(x)$) e é crescente para $x > 0$. Assim, como $f(0) < 0$ e $f(2) > 0$, a equação $b^8 + 18b^2 - 27 = 0$ tem duas soluções r e $-r$, e nesse caso, temos $a = -r^3/3$ e $b = r$ ou $a = r^3/3$ e $b = -r$. Como há 4 anagramas de *aaab*, há $2 \cdot 4 = 8$ soluções nesse caso.

• $\boldsymbol{x = y = a}$ **e** $\boldsymbol{z = w = b \neq a}$. Nesse caso, obtemos o sistema $-a^3 = a + 2b$ e $-b^3 = 2a + b$. Somando as duas equações obtemos $-(a^3 + b^3) = 3(a + b) \Leftrightarrow a + b = 0$ ou $a^2 + ab + b = -3$. O segundo caso é impossível, pois $a^2 + ab + b^2 = (a + b/2)^2 + 3b^2/4 \geq 0$. No primeiro caso, temos $-a^3 = a - 2a$ e $-b^3 = -2b + b$, ou seja, $a^3 = a$ e $b^3 = b$. Como a e b são diferentes, temos $\{a, b\} = \{-1, 1\}$. Nesse caso, como há $\frac{4!}{2!2!} = 6$ anagramas de *aabb*, há seis soluções nesse caso.

• $\boldsymbol{x = y = a, z = b}$ **e** $\boldsymbol{w = c, a, b, c}$ **distintos**. Nesse caso, temos $-a^3 = a + b + c$, $-b^3 = 2a + c$ e $-c^3 = 2a + b$. Subtraindo a primeira equação das outras duas, temos $a^3 - b^3 = a - b$ e $a^3 - c^3 = a - c$. Como a, b e c são distintos, temos $a^2 + ab + b^2 = a^2 + ac + c^2 = 1$ (*), de modo que $ab + b^2 = ac + c^2 \Leftrightarrow a(b - c) + (b - c)(b + c) \Leftrightarrow a + b + c = 0$. Logo $-a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0$, e em (*) temos $b^2 = c^2 = 1$, de modo que $\{b, c\} = \{-1, 1\}$. Verifica-se que esses valores de a, b e c satisfazem o sistema. Como há $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ anagramas de *aabc*, nesse caso há 12 soluções.

Portanto o total de soluções reais é $1 + 8 + 6 + 12 = 27$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

• Provou que dois dos números x, y, z, w são iguais: **[+ 2 pontos]**
• Separou o problema em casos que cobrem todas as possibilidades: **[+ 1 ponto]**
• Fez todos os casos: **[+ 7 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com a última, mas se acumulam com as outras duas:
• Fez todos os casos, menos um: **[no máximo 5 de 7 pontos]**
• Fez todos os casos, menos dois: **[no máximo 2 de 7 pontos]**
• Fez todos os casos, menos três ou mais: **[0 de 7 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
• Encontrou a solução (0,0,0,0): **[0 ponto]**
• Encontrou a solução (1,1,–1,–1), mas não contou os anagramas: **[0 ponto]**
• Encontrou a solução (1,1,–1,–1) e contou os anagramas: **[1 ponto]**
• Encontrou a solução (0,0,–1,1), mas não contou os anagramas: **[0 ponto]**
• Encontrou a solução (0,0,–1,1) e contou os anagramas: **[1 ponto]**
• Encontrou as soluções (1,1,–1,–1) e (0,0,–1,1), mas não contou os anagramas: **[0 ponto]**
• Encontrou as soluções (1,1,–1,–1) e (0,0,–1,1) e contou os anagramas: **[1 ponto]**

PROBLEMA 4:

Vamos separar as frações nas maiores potências de 3 que dividem o denominador. Como $3^6 = 729 < 2013 < 2187 = 3^7$, não aparece 3^7 no denominador. Somando frações com denominadores $3^6 = 729$ e $2 \cdot 3^6 < 2013$, temos

$$\frac{1}{3^6} + \frac{1}{2\cdot 3^6} = \frac{2+1}{2\cdot 3^6} = \frac{1}{2\cdot 3^5}$$

Assim, não aparece 3^6 no denominador, pois ele é cancelado.

Vejamos agora os denominadores com múltiplos de $3^5 = 243$. Tomemos o cuidado de não tomar frações já tratadas, ou seja, tomemos $243k$ onde k não é múltiplo de 3. Veja ainda que $243 \cdot 8 < 2013 < 243 \cdot 9$, logo obtemos:

$$\frac{1}{3^5} + \frac{1}{2\cdot 3^5} + \frac{1}{4\cdot 3^5} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^5} + \frac{1}{8\cdot 3^5}$$
$$= \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3^5}\left(\frac{9}{8} + \frac{9}{14} + \frac{9}{20}\right) = \frac{1}{3^3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{14} + \frac{1}{20}\right)$$

Aqui, juntamos as frações das pontas:

$$\frac{1}{3^5 t} + \frac{1}{3^5(9-t)} = \frac{9-t+t}{3^5 t(9-t)} = \frac{1}{3^3 t(9-t)}.$$

Então, a soma das frações com denominador com exatamente cinco fatores 3 têm como maior potência de 3 divisora do denominador no máximo 27. Ou seja:

$$\frac{1}{3^5} + \frac{1}{2\cdot 3^5} + \frac{1}{4\cdot 3^5} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^5} + \frac{1}{8\cdot 3^5} = \frac{A_1}{3^3 B_1}$$, com B_1 não múltiplo de 3.

A_1 pode ser múltiplo de 3, mas isso não irá interferir, como veremos a seguir.

Somando todas as outras frações, temos que a maior potência de 3 que divide algum denominador é 3^4. Logo tal soma é da forma $\dfrac{A_0}{3^4 B_0}$, em que B_0 não é múltiplo de 3.

Somando tudo, temos a soma total

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{2\cdot 3^5} + \frac{A_1}{3^3 B_1} + \frac{A_0}{3^4 B_0} = \frac{B_1 B_0 + 2\cdot 3(3A_1 B_0 + A_0 B_1)}{2 B_1 B_0 3^5}$$

Como B_1 e B_0 não são múltiplos de 3, o numerador acima não é múltiplo de 3, e o 3^5 no denominador não é cancelado.

Concluímos que a maior potência de 3 que divide B é 3^5, ou seja, $n = 5$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Somou as frações com denominador 3^6 e $2\cdot 3^6$: **[+ 2 pontos]**
- Somou as frações com denominador $3^5 k$, com k não múltiplo de 3 e verificou que é da forma $\dfrac{A_1}{3^3 B_1}$, B_1 não múltiplo de 3: **[+ 2 pontos]**
- Somou as outras frações e verificou que é da forma $\dfrac{A_0}{3^4 B_0}$, B_0 não é múltiplo de 3: **[+ 3 pontos]**
- Concluiu: **[+ 3 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as acima e nem entre si.

- Só a resposta: **[0 ponto]**
- Fez casos pequenos (trocando 2013 por números menores): **[0 ponto]**
- Calculou o numerador módulo 3^n: **[0 ponto]**