36ª Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	0005	0375	1424	1006	0030	0018

01. [Resposta: 0005]

Solução: Denotaremos nesta solução a área do triângulo *XYZ* por [*XYZ*]. Veja que $\frac{EG}{GD}=\frac{[EBG]}{[BDG]}$.

Agora, $\frac{[EBG]}{[BCF]}=\frac{\frac{1}{2}EB\cdot BG\cdot \text{sen}\,\angle EBG}{\frac{1}{2}BC\cdot BF\cdot \text{sen}\,\angle CBF}$. Como $\angle EBG=\angle CBF$, temos $\frac{[EBG]}{[BCF]}=\frac{EB\cdot BG}{BC\cdot BF}$ (1).

Analogamente, $\frac{[BGD]}{[ABF]}=\frac{BG\cdot BD}{BA\cdot BF}$ (2). Dividindo (1) por (2), obtemos $\frac{[EBG]}{[BGD]}\cdot\frac{[ABF]}{[BCF]}=\frac{EB\cdot BA}{BC\cdot BD}$. Finalmente, como $\frac{[ABF]}{[BCF]}=\frac{AF}{CF}$, temos $\frac{[EBG]}{[BGD]}=\frac{EB\cdot BA\cdot CF}{BC\cdot BD\cdot AF}=\frac{2}{3}\cdot 3\cdot 2=4$. Logo $\frac{EG}{GD}=\frac{4}{1}$ e, portanto, $m + n = 5$.

02. [Resposta: 0375]

Solução: Denotaremos o imparial de n por $n\&$. Para determinar os três últimos algarismos de 2014&, devemos encontrar o resto de 2014& na divisão por 1000. Para isso, analisaremos tal número módulo 8 e módulo 125.

Analisando inicialmente módulo 8, sendo $2014 = 8\cdot 251 + 6$, $2014\& \equiv (1\cdot 3\cdot 5\cdot 7)^{251}\cdot 1\cdot 3\cdot 5 \equiv 1^{251}\cdot 7 \equiv 7$ (mód 8).

Analisando agora módulo 125, temos que 125 é um dos fatores de 2014& e, portanto, $2014\& \equiv 0$ (mód 125). Assim, $2014\& = 125t \Rightarrow 125t \equiv 7$ (mód 8) $\Leftrightarrow 5t \equiv 15$ (mód 8) $\Leftrightarrow t \equiv 3$ (mód 8).

Logo $t = 8k + 3$ e $2014\& = 125(8k + 3) = 1000k + 375 \equiv 375$ (mód 1000).

Logo os três últimos algarismos de 2014& são 375.

03. [Resposta: 1424]

Solução: Elevando ao quadrado a condição dada, obtemos $a_n^2=a_{n-1}^2+n$. Somando tal relação com n variando de 2 até 2014, temos $a_{2014}^2 = a_1^2+2+3+\cdots+2014$. Como $a_1 = 1$ e a sequência é formada apenas por números positivos, segue que $a_{2014}=\sqrt{1+2+\cdots+2014}=\sqrt{\frac{2015\cdot 2014}{2}}=\sqrt{2015\cdot 1007}\approx 1424{,}47$. Logo, o inteiro mais próximo de a_{2014} é 1424.

04. [Resposta: 1006]

Solução: Seja k a quantidade de elementos de um conjunto com mediana 2012. Temos $k \geq 1$.

Se k é ímpar, escolhemos $\frac{k-1}{2}$ elementos do conjunto $\{1,2,\ldots,2011\}$ e $\frac{k-1}{2}$ elementos do conjunto $\{2013,2014\}$. Por causa disso, $\frac{k-1}{2} \leq 2 \Leftrightarrow k \leq 5$. Com isso, há $\binom{2011}{\frac{k-1}{2}} \cdot \binom{2}{\frac{k-1}{2}}$ conjuntos nesse caso. Somando, obtemos $\binom{2011}{0} \cdot \binom{2}{0} + \binom{2011}{1} \cdot \binom{2}{1} + \binom{2011}{2} \cdot \binom{2}{2}$.

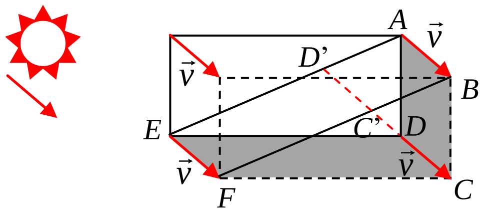
Se k é par, então $k = 2$ ou $k = 4$. Se $k = 2$, podemos escolher $\{2011,2013\}$ ou $\{2010,2014\}$; se $k = 4$, devemos ter dois números maiores do que 2012, ou seja, ambos 2013 e 2014, 2011, e qualquer um dos números de 1 a 2010. Assim, se k é par, o total é $2 + 2010 = 2012$.

Somando tudo e vendo módulo 2014, temos

$$\binom{2011}{0} \cdot \binom{2}{0} + \binom{2011}{1} \cdot \binom{2}{1} + \binom{2011}{2} \cdot \binom{2}{2} + 2012 \equiv 1 + (-3) \cdot 2 + 2011 \cdot 1005 - 2 \equiv 1006 \ (\text{mód} 2014)$$

05. [Resposta: 0030]

Solução: A figura a seguir mostra uma visão superior da caixa com sua sombra. Note que como os raios de luz formam 45º com o chão, a sombra das arestas laterais têm comprimento igual à altura h da caixa e são paralelas entre si. Essas sombras induzem uma translação da base de um vetor $\vec{v}$ paralelo à projeção dos raios de luz no chão e de comprimento h:



Como a distância entre AB e CD é igual à distância entre AB e $C'D'$, as áreas dos paralelogramos $ABCD$ e $ABC'D'$ são iguais. Analogamente, as áreas de $CDEF$ e $C'D'EF$ são iguais também. Deste modo, a área da sombra é $[ABC'D'] + [C'D'EF] = [ABFE] \leq AE \cdot h$. Note que a igualdade ocorre quando $\vec{v} \perp AE$.

Assim, basta calcular $AE \cdot h$ para cada possibilidade de base do bloco.

- Base 3×4: $AE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ e $h = 6$, área $5 \cdot 6 = 30$;
- Base 3×6: $AE = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ e $h = 4$, área $3\sqrt{5} \cdot 4 = 12\sqrt{5} < 30$;
- Base 4×6: $AE = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ e $h = 3$, área $2\sqrt{13} \cdot 3 = 6\sqrt{13} < 30$.

Assim, a maior sombra que o bloco pode ter é 30.

06. [Resposta: 0018]

Solução: Se $a < b$ e a divide b, ou seja, b é múltiplo de a, b é pelo menos $2a$, ou seja, $b \geq 2a$. Assim, sendo $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < 2016 < a_{k+2} < \ldots < a_n < 2000000$ os elementos de um conjunto completamente divisível, temos

$$2000000 > a_n \geq 2a_{n-1} \geq 4a_{n-2} \geq \ldots \geq 2^{n-k-2} a_{k+2} \geq 2^{n-k-1} \cdot 2016$$

$$\Rightarrow 2^{n-k-1} < \frac{2000000}{2016} \Leftrightarrow n - k - 1 \leq 9 \Leftrightarrow n \leq k + 10$$

Além disso, todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são divisores de $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Como 2016 tem 8 fatores primos não necessariamente distintos, e a_i/a_{i-1} é inteiro maior do que 1, $k \leq 8$ e a quantidade n de elementos de um conjunto completamente divisível é $n \leq 8 + 10 = 18$. O conjunto a seguir é um exemplo de conjunto completamente divisível com 18 elementos:

$\{1,2,4,8,16,32,96,288,2016,4032,8064,16128,32256,64512,129024,258048,516096,1032192\}$

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

Seja n a quantidade de alunos que eram contra o adiamento da prova e seja $2n$ a quantidade de alunos que eram a favor do adiamento da prova. Sejam x o número de alunos que mudaram de a favor para contra o adiamento da prova e $8 - x$ o número de alunos que mudaram de contra para a favor do adiamento da prova. Como 5/9 dos alunos passaram a ser contra o adiamento da prova, $\frac{n+x-(8-x)}{3n} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow x = \frac{n+12}{3}$. Como x é inteiro, devemos ter $n = 3k$, k inteiro positivo. Logo $x = k + 4$. Como $x \leq 8$, segue que $k \leq 4$ e sendo o total de alunos $3n = 9k$, o número máximo de alunos é 36, que claramente pode ser atingido.

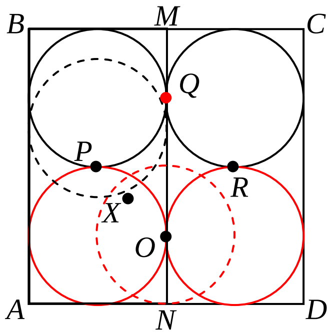
CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obteve uma equação que permite calcular x em função de n ou equivalente: **[+ 5 pontos]**
- Calculou x: **[+ 2 pontos]**
- Provou que a quantidade de alunos é no máximo 36: **[+ 3 pontos]**

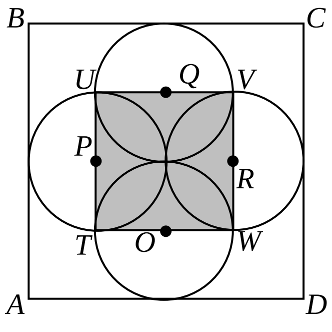
As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Obteve um exemplo com 36 alunos: **[1 ponto]**
- Citou somente o caso particular em que todos os 8 alunos que mudaram de opinião o fizeram de a favor para contra, afirmando que é o “pior caso”, sem demonstração: **[no máximo 5 pontos]**
- Só a resposta: **[0 ponto]**

PROBLEMA 2:
Provaremos que S possui pelo menos 4 pontos. Para isso, considere a figura a seguir:



Cada circunferência exibida tem raio 1 e, portanto, deve possuir pelo menos um ponto de S em sua borda ou seu interior. Logo S possui pelo menos 4 pontos, um de cada círculo, ou S contém pelo menos um ponto do conjunto $\{O, P, Q, R\}$ dos pontos de tangência das circunferências. Suponha que esse ponto é Q. Além disso, S deve ter mais um ponto de cada um dos círculos com borda vermelha.
Se S não contém O, tem um ponto X no círculo da esquerda e um ponto Y no círculo da direita e, se S tem menos que 4 elementos, $S = \{Q, X, Y\}$. Se X é diferente de P, ou seja, ele está abaixo de P, deslocamos o círculo superior esquerdo para baixo, obtendo o círculo tracejado preto que não contém pontos de S. Logo P e, analogamente, R, estão em S. Mas aí $S = \{P, Q, R\}$ e o círculo de centro O não contém pontos de S, absurdo.
Se S contém O, considere os pontos médios M e N dos lados AD e BC. Então MN tangencia as quatro circunferências. Note que devemos ter um ponto K em S no interior do retângulo $ABMN$; caso contrário, algum círculo que tangencia AB e MN (como o tracejado na figura) não contém pontos de S. Analogamente, devemos ter mais um ponto L em S no interior do retângulo $CDNM$. Com isso, S tem pelo menos quatro elementos: O, Q, K e L, nova contradição.
Isso mostra que S possui pelo menos 4 pontos. Afirmamos agora que $S = \{O, P, Q, R\}$ satisfaz as condições do enunciado. Para isso, veja inicialmente que as circunferências de raio 1 que estão inteiramente contidas no quadrado de lado 4 têm centro na borda ou no interior do quadrado $TUVW$ abaixo, que tem mesmo centro que $ABCD$ e lado $4 - 2 = 2$. Assim, para mostrar que $S = \{O, P, Q, R\}$ satisfaz o enunciado, basta mostrar que as circunferências de raio 1 com centro nos pontos de S cobrem inteiramente o quadrado $TUVW$. Para isso, basta considerar a figura a seguir:



Portanto a quantidade mínima de pontos de S é 4.
Observação: *Há vários outros exemplos de conjuntos S com 4 pontos. O critério para verificar se funciona é o mesmo: os círculos com centro em S e raio 1 cobrem $TUVW$.*

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Parte I: Provar que *S* tem pelo menos 4 elementos (valor total: 6 pontos)

- Provou que S tem no mínimo 4 pontos: **[+ 6 pontos]**

A seguinte pontuação não se acumula com a anterior, mas se acumula com as demais:

- Mostrou que S tem pelo menos 3 pontos: **[2 pontos]**
- Mostrou que S tem pelo menos 2 pontos: **[0 ponto]**

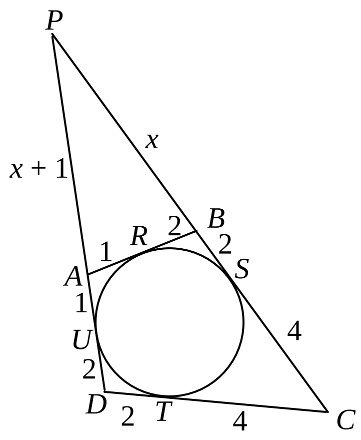
Parte II: Mostrar que *S* pode ter 4 elementos (valor total: 4 pontos)

- Exibiu um exemplo com 4 pontos: **[+ 1 ponto]**
- Mostrou por que o exemplo com 4 pontos funciona: **[+ 3 pontos]**

- Só a resposta: **[0 ponto]**

PROBLEMA 3:

Uma solução:



Seja P a interseção dos lados AD e BC. Sejam também $PU = PS = x + 2$ e $\angle APB = \alpha$. Fazendo a lei dos cossenos nos triângulos PAB e PCD, temos

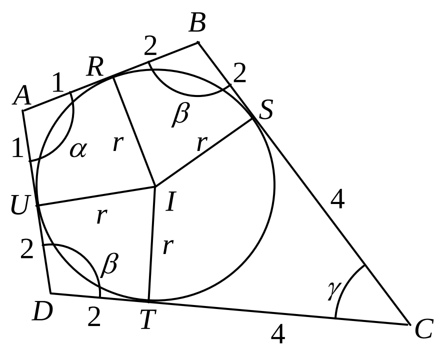
$$\cos\alpha = \frac{x^2 + (x+1)^2 - 9}{2x(x+1)} \text{ e } \cos\alpha = \frac{(x+4)^2 + (x+6)^2 - 36}{2(x+4)(x+6)}.$$

Igualando as duas últimas expressões, segue que

$$\frac{x^2 + x - 4}{x^2 + x} = \frac{x^2 + 10x + 8}{x^2 + 10x + 24} \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2 + x} = 1 - \frac{16}{x^2 + 10x + 24}.$$

Logo $\frac{4}{x^2 + x} = \frac{16}{x^2 + 10x + 24} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, pois x é positivo. Isso nos dá $\cos\alpha = \frac{4^2 + 5^2 - 9}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$. Voltando ao triângulo PSU, segue pela lei dos cossenos que SU^2 = $(x+2)^2 + (x+2)^2 - 2(x+2)^2\cos\alpha = 36 + 36 - 72\cos\alpha = \frac{72}{5}$. Logo $SU = \frac{6\sqrt{10}}{5}$.

Outra solução:



Seja I o centro do círculo inscrito no $ABCD$. Inicialmente, veja que os triângulos IDU e IBR são congruentes pelo caso LAL. Logo $\angle RBS = \angle UDT = \beta$. Sejam os outros ângulos como marcados na figura e seja também r o raio da circunferência inscrita no quadrilátero. Temos $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = r$,

$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4}$. Veja que $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=180^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) \Leftrightarrow$ $\frac{r+\frac{r}{2}}{1-r\cdot\frac{r}{2}}=-\frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{4}}{1-\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{4}} \Leftrightarrow r=2$.

Agora, no triângulo *ISU*, temos $SU = 2r\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Sendo $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{2+1}{1-2\cdot 1}=-3$, $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=9\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=9\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. Logo SU = $2\cdot 2\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Encontrou um sistema de equações que permita encontrar o α da primeira solução ou o r da segunda solução: **[+ 2 pontos]**
- Encontrou o α da primeira solução ou o r da segunda solução: **[+ 6 pontos]**
- Concluiu: **[+ 2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Prolongou dois lados opostos e marcou a interseção (como *P* na primeira solução): **[1 ponto]**
- Mostrou que *ABCD* é cíclico (sim, *ABCD* é cíclico): **[0 ponto]**
- Calculou *RS*, *ST*, *TU* ou *RU*: **[0 ponto]**
- Calculou $RT = \frac{6\sqrt{10}}{5}$ no lugar de *SU* (a conta é análoga): **[10 pontos]**
- Só a resposta: **[0 ponto]**