Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário, segunda fase, primeiro dia
27 de outubro de 2012

1. Seja $N = 2012$. Determine todas as (N^2)-uplas de números reais $(a_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq N$, que tornam o seguinte limite convergente:

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{1 \leq i,j \leq N} \left(a_{i,j} \sqrt[j]{x+i} \right)$$

2. Considere todas as matrizes quadradas de ordem $4n$ que têm $4n$ entradas iguais a 1 e $4n$ entradas iguais a -1 e as demais entradas iguais a 0.

   Qual é o maior valor possível de seu determinante (em função de n)?

3. Neste problema, uma *caixa* é um paralelepípedo retângulo $P \subset \mathbb{R}^3$. Definimos o *tamanho* da caixa P como sendo $a^s + b^s + c^s$ onde a, b, c são os comprimentos das arestas de P nas três direções e s é um inteiro fixo.

   Determine para quais valores de s vale a seguinte afirmação:
   se uma caixa P_1 está contida em uma caixa P_0
   então o tamanho de P_1 é menor ou igual ao tamanho de P_0.

   Obs.: Os paralelepípedos em questão podem estar em qualquer posição (em particular não precisam ter lados paralelos aos eixos coordenados).