Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário, segunda fase, segundo dia
28 de outubro de 2012

4. Cada indivíduo de uma população tem dois genes (possivelmente repetidos) dentre os genes $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Suponha que, na geração 0 desta população, $p_{ij}(0)$ (onde $1 \leq i \leq j \leq n$) é a proporção de indivíduos que têm o genótipo G_iG_j (ou G_jG_i, que é biologicamente idêntico a G_iG_j).

   Para gerar cada indivíduo da geração $k+1$, escolhem-se dois indivíduos da geração k independentemente e ao acaso, e escolhe-se um gene de cada um independentemente e ao acaso: estes dois genes serão o genótipo do filho. Seja $p_{ij}(k)$ a probabilidade de um indivíduo da geração k ter o genótipo G_iG_j (ou G_jG_i). Suponha que a população é grande de tal forma que a cada geração pelo menos dois indivíduos são gerados por este processo.

   Mostre que $p_{ij}(2012) = p_{ij}(2013)$ para todo i, j $(1 \leq i \leq j \leq n)$.

5. Seja $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ uma função duas vezes derivável satisfazendo $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$. Para cada $x > 0$ considere o triângulo cujos lados são a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ e os dois eixos coordenados. Sabemos que a área deste triângulo é igual a C (constante e independente de x).

   Determine os possíveis valores de $f(1)$ (em função de C).

6. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.

   (a) Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência decrescente de termos positivos tal que $\sum a_n = +\infty$, então existe uma sequência decrescente de termos positivos $(b_n)_{n\geq 1}$ com $b_n \leq a_n$ para todo n, $\sum b_n = +\infty$ e $\lim(n\, b_n) = 0$.

   (b) Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência decrescente de termos positivos tal que $\sum a_n = +\infty$, então existe uma sequência decrescente de termos positivos $(b_n)_{n\geq 1}$ com $b_n \leq a_n$ para todo n, $\sum b_n = +\infty$ e $(n\, b_n)_{n\geq 1}$ decrescente.