35a. Olimpíada Brasileira de Matemática

Segunda fase - Nível Universitário

Primeiro dia

Problema 1

A reta tangente no ponto A de uma hipérbole corta suas assíntotas em B e C. A outra tangente à hipérbole traçada pelo ponto médio M do segmento AC corta a assíntota que passa por B no ponto D. Se O é o centro da hipérbole, prove que OM é paralela a AD.

Problema 2

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função estritamente crescente. Prove que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2|f(n)|+1} - \frac{1}{2(|f(n)|+f(n)-f(n-1))+1} \right) \leq \frac{4}{3}$$

e encontre todas as funções f para as quais vale a igualdade.

Problema 3

Em cada ponto P do reticulado $\mathbb{Z}^2$, temos um vetor unitário v_P que aponta ou para cima, ou para baixo, ou para a esquerda, ou para a direita. Uma formiga anda de um ponto do reticulado a outro, caminhando uma unidade na direção do vetor v_P associado do ponto de partida P; logo após a formiga deixar P, o vetor v_P é substituido por sua rotação de 90° no sentido anti-horário (mas os outros vetores v_Q, para $Q \neq P$, não mudam nesse momento). A formiga parte de um ponto inicial P_0. Seja P_n sua posição após n movimentos.

a) Prove que não é possível que a formiga fique restrita a uma região limitada, isto é, dado qualquer $R > 0$ existe n tal que a distância da origem de $|P_n - P_0|$ é maior do que R.

b) É possível que a formiga passe pela origem infinitas vezes? Em outras palavras, existe alguma configuração inicial para a qual, para todo N, existe $n > N$ com $P_n = P_0$?

35a. Olimpíada Brasileira de Matemática
Segunda fase - Nível Universitário
Segundo dia

Problema 4

Um sapo dá saltos no plano euclidiano. Começa em $(0,0)$, e, para cada salto, se está inicialmente numa posição P, escolhe um vetor de comprimento 1 aleatória e uniformemente, e salta para a posição $P+v$. Após 3 saltos, qual é a probabilidade de que o sapo esteja no disco unitário $\{w \in \mathbb{R}^2 \mid |w| \leq 1\}$?

Problema 5

Seja $f_0 : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f_0(x) = x$.
Defina funções $f_n : [0,1] \to [0,1]$ para todo n natural por

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(4x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(4x-3), & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Assim, por exemplo,

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 2x-1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) Prove que para quaisquer $x, y \in [0,1]$ e para qualquer n, vale

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq f_n\left(|x-y|\right).$$

b) Encontre o maior número real α para o qual existe $C > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in [0,1]$ e para qualquer n, vale

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq C \cdot |x-y|^{\alpha}.$$

(Observe que C não pode depender de n.)

Problema 6

Sejam θ_1=0, $\theta_2 = 01$ e, para $n \geq 2$, $\theta_{n+1} = \theta_n \theta_{n-1}$ (isto é, θ_{n+1} é obtida pela concatenação de θ_n e θ_{n-1}; assim, por exemplo, $\theta_3 = 010$ e $\theta_4 = 01001$). Considere a sequência infinita θ que começa com θ_n para todo n, ou seja, $\theta = 0100101001001....$

a) Seja $\alpha = 0,0100101001001... \in [0,1)$ o número cuja representação decimal é $0,\theta$. Prove que α é irracional.

b) Prove que, para todo inteiro positivo k, o número de subsequências formadas por k algarismos consecutivos de θ é $k+1$.