36^a Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário – Segunda Fase
1^o Dia - 25 de Outubro de 2014

Duração: 4h e 30min.

Problema 1. Considere uma ampulheta formada por dois cones congruentes. No instante inicial, a ampulheta encontra-se cheia de água em seu cone superior e vazia em seu cone inferior. A água então começará a escoar para o cone inferior. Que fração do volume total de água terá caído quando o centro de gravidade da água estiver no vértice comum aos dois cones da ampulheta?

Nota: Para efeito do cálculo do centro de gravidade você pode desconsiderar a massa do filete de água que passa pela abertura da ampulheta. Considere também que a água na parte de cima forma um cone e que a água na parte de baixo forma um tronco de cone.

Problema 2. Seja $f_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ uma função de variação limitada, i.e.

$$V(f_0) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_0(n+1) - f_0(n)| < \infty.$$

Para cada $t \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ definimos a função $f_t : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ por

$$f_t(n) := \frac{f_{t-1}(n-1) + f_{t-1}(n+1)}{2},$$

e definimos também a função maximal $f^* : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ por

$$f^*(n) := \sup_{t\geq 0} f_t(n).$$

(a) Prove que se $n \in \mathbb{Z}$ é tal que $f^*(n) > f_0(n)$, então:

$$f^*(n) \leq \frac{f^*(n-1) + f^*(n+1)}{2}.$$

(b) Prove que:

$$V(f^*) \leq V(f_0).$$

Problema 3. Sejam D_1 e D_2 dois discos fechados e disjuntos no plano. Prove que existem pontos P e Q no plano, não pertencentes a $D_1 \cup D_2$, que satisfazem a seguinte propriedade:

"Toda parábola que passa por P e Q intersecta $D_1 \cup D_2$".

36^a Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário – Segunda Fase
2^o Dia - 26 de Outubro de 2014

Duração: 4h e 30min.

Problema 4. Sejam $1 \leq x \leq y - 2 \leq 7$ e sejam C_1 e C_2 os círculos de raio 1 centrados em $(x, 0)$ e $(y, 0)$, respectivamente.

(a) Qual é o comprimento do caminho mínimo de $(0, 0)$ a $(10, 0)$ que não passa pelos interiores de C_1 e C_2?

(b) Quando x e y variam, qual é a menor resposta possível para o item (a)?

Problema 5. (a) Considere um caminho aleatório nos números inteiros (ou seja, começa-se no 0 e, a cada passo, vai-se para o próximo número à direita com probabilidade 1/2 ou para o próximo à esquerda com probabilidade 1/2). Sejam A e B inteiros positivos. Prove que o número esperado de passos para se atingir pela primeira vez um dos números $-A$ ou B é AB.

(b) Considere um caminho aleatório em um relógio (ou seja, começa-se, digamos, no 12 e a cada segundo vai-se para o próximo número à direita com probabilidade 1/2 ou para o próximo à esquerda com probabilidade 1/2). Qual é o valor esperado do número mínimo de passos para que o caminho visite todos os doze números do relógio?

Problema 6. Considere um número real α e constantes $b > 0$ e $\gamma \geq 1$ tais que para quaisquer p e q inteiros com $q \geq 1$ vale

$$|q\alpha - p| \geq \frac{b}{q^\gamma}.$$

Prove que existe uma constante C tal que, para todo inteiro $N \geq 1$, o conjunto

$$X_N = \{m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq CN^\gamma\}$$

é tal que, para todo $x \in [0, 1]$ existe $y \in X_N$ com $|x - y| < 1/N$.