Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário, segunda fase, primeiro dia
17 de outubro de 2015

1. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y^2) = f(x) + f(y)^2.$$

2. Dada uma reta $r \subset \mathbb{R}^2$, seja ρ_r a reflexão em relação a r (em particular, $\rho_r(p) = p$ se e somente se $p \in r$). Dizemos que r é *eixo de simetria* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ se $\rho_r(X) = X$.

   Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujo gráfico admite dois eixos de simetria distintos. Prove que o limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

   existe e é finito.

3. Mostre que, para todo $b > 0$, temos

$$I(b) = \int_1^\infty \frac{\sqrt{u + b}}{u^2 + b} du > \frac{\pi}{2} \cdot$$

Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário, segunda fase, segundo dia
18 de outubro de 2015

4. Seja Q uma matriz real ortogonal $n \times n$ (ou seja, temos $QQ^T = Q^TQ = I$). Seja P uma matriz de permutação $n \times n$ (ou seja, as entradas de P são iguais a 0 ou 1, com exatamente uma entrada igual a 1 por linha ou por coluna).

   Prove que as duas condições abaixo são equivalentes:

   (a) Existem matrizes triangulares superiores U_0 e U_1 com
   $$Q = U_0PU_1.$$

   (b) Existem matrizes triangulares inferiores L_0 e L_1 com
   $$Q = L_0PL_1.$$

5. Thor e Loki jogam o seguinte jogo: Thor escolhe um inteiro $n_1 \geq 1$, Loki escolhe $n_2 > n_1$, Thor escolhe $n_3 > n_2$, e assim por diante. Sejam
   $$X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \left([n_{2j-1}, n_{2j}) \cap \mathbb{Z} \right);$$
   $$s = \sum_{n \in X} \frac{1}{n^2}.$$

   Thor ganha se s é racional e Loki ganha se s é irracional.

   Determine quem tem estratégia para ganhar.

6. Seja $n \geq 1$. Sejam $A(z)$ e $B(z)$ polinômios de coeficientes reais de graus $n+1$ e n, respectivamente. Sejam $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ e $\{b_j\}_{j=1}^{n}$ as raízes de A e B, respectivamente. Suponha que os a_i's e os b_j's sejam todos reais e que valha
   $$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n < a_{n+1}.$$

   Mostre que uma das funções $E(z) = A(z) - iB(z)$ ou $E(z) = A(z) + iB(z)$ satisfaz a desigualdade
   $$|E(x - iy)| < |E(x + iy)|$$
   para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ com $y > 0$.