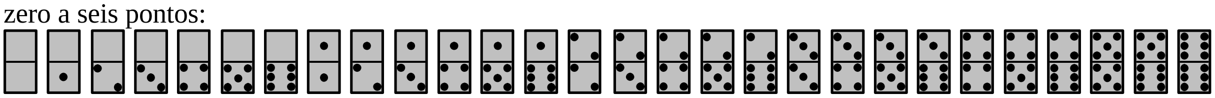
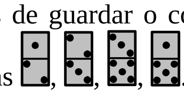
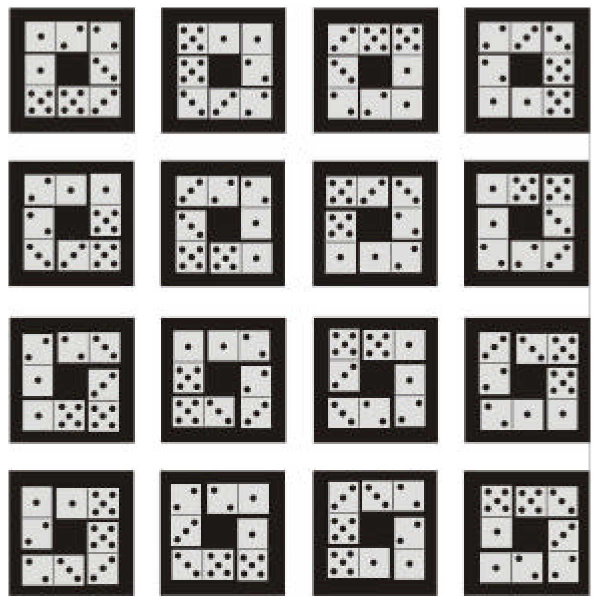
XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º. e 9º. Anos)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Um dominó é formado por 28 peças diferentes. Cada peça tem duas metades, sendo que cada metade tem de zero a seis pontos:

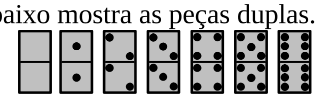


Esmeralda coloca 4 peças de dominó dentro de um estojo, respeitando as regras do jogo, isto é, peças vizinhas se tocam em metades com as mesmas quantidades de pontos. Caso seja possível guardar as quatro peças no estojo, dizemos que o conjunto de quatro peças é *precioso*. Por exemplo, a figura ao lado mostra as maneiras de guardar o conjunto precioso formado pelas peças .



a) Mostre que um conjunto precioso não pode conter duas peças duplas.

A figura abaixo mostra as peças duplas.



b) Quantos conjuntos preciosos contêm uma peça dupla?

c) Determine a quantidade total de conjuntos preciosos.

PROBLEMA 2

Seja A um dos pontos de interseção de dois círculos com centros X e Y. As tangentes aos círculos em A intersectam novamente os círculos em B e C. Seja P o ponto de plano tal que $PXAY$ é um paralelogramo. Prove que P é o circuncentro do triângulo ABC.

PROBLEMA 3

Prove que não existem inteiros positivos x e y tais que $x^3 + y^3 = 2^{2009}$.

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º. e 9º. Anos)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Resolva, em números reais, o sistema

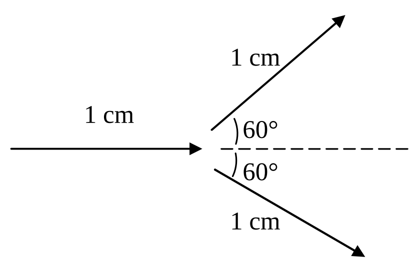
$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$$

$$xyz=1.$$

PROBLEMA 5

Uma formiga caminha no plano da seguinte maneira: inicialmente, ela anda 1cm em qualquer direção. Após, em cada passo, ela muda a direção da trajetória em 60^o para a esquerda ou direita e anda 1cm nessa direção. É possível que ela retorne ao ponto de onde partiu em

(a) 2008 passos?
(b) 2009 passos?



PROBLEMA 6

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. As retas AB e AC cortam o circuncírculo de OBC novamente em $B_1 \neq B$ e $C_1 \neq C$, respectivamente, as retas BA e BC cortam o circuncírculo de OAC em $A_2 \neq A$ e $C_2 \neq C$, respectivamente, e as retas CA e CB cortam o circuncírculo de OAB em $A_3 \neq A$ e $B_3 \neq B$, respectivamente. Prove que as retas A_2A_3, B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.