XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8o. e 9o. Anos)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Dizemos que um número inteiro positivo n é *abestado* se ao lermos da direita para esquerda obtivermos um inteiro maior que n. Por exemplo, 2009 é abestado porque 9002 é maior que 2009, por outro lado, 2010 não é abestado pois 0102, que é o número 102, é menor que 2010 e 3443 não é abestado pois quando lido da direita para esquerda é exatamente igual ao original. Quantos inteiros positivos de quatro algarismos são abestados?

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um paralelogramo e Γ a circunferência circunscrita ao triângulo ABD. Se E e F são as interseções de Γ com as retas BC e CD respectivamente, prove que o circuncentro do triângulo CEF está sobre Γ.

PROBLEMA 3

Arnaldo e Bernaldo participam do seguinte jogo em um tabuleiro $m \times n$, m, $n \geq 2$. Arnaldo começa escolhendo uma casinha e colocando um cavalo na casinha escolhida; em seguida, Bernaldo e Arnaldo movem alternadamente o cavalo, começando por Bernaldo, com a restrição de que o cavalo não pode cair em casinhas que já foram visitadas. Perde quem não poder mover o cavalo. Determinar, em função de m e n, qual jogador tem uma estratégia para ganhar o jogo, não importando os movimentos do outro jogador e mostrar como ele deve jogar para ganhar.

Observação: Cada movimento de um cavalo consiste em ir duas casas na vertical ou na horizontal e, em seguida, uma casa na direção perpendicular.

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8o. e 9o. Anos)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Sejam a, b e c reais tais que $a \neq b$ e $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2010$. Calcule $c^2(a + b)$.

PROBLEMA 5

As diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$ se intersectam em O. Os círculos circunscritos aos triângulos AOB e COD intersectam as retas BC e AD, pela segunda vez, nos pontos M, N, P e Q. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ está inscrito em um círculo de centro O.

PROBLEMA 6

Os três lados e a área de um triângulo são números inteiros. Qual é o menor valor da área desse triângulo?