XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$.

Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

PROBLEMA 2

Sobre uma reta há um conjunto S de $6n$ pontos. Destes, $4n$ são escolhidos ao acaso e pintados de azul; os $2n$ demais são pintados de verde. Prove que existe um segmento que contém exatamente $3n$ pontos de S, sendo $2n$ pintados de azul e n pintados de verde.

PROBLEMA 3

Sejam x, y, z reais quaisquer tais que $x + y + z = xy + yz + zx$. Encontre o valor mínimo de

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1}$$

XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja *ABCD* um quadrilátero cíclico e *r* e *s* as retas simétricas à reta *AB* em relação às bissetrizes internas dos ângulos $\angle CAD$ e $\angle CBD$, respectivamente. Sendo *P* a interseção de *r* e *s* e *O* o centro do círculo circunscrito a *ABCD*, prove que *OP* é perpendicular a *CD*.

PROBLEMA 5

Prove que para quaisquer inteiros $a > 1$ e $b > 1$ existe uma função *f* dos inteiros positivos nos inteiros positivos tal que $f(a \cdot f(n)) = b \cdot n$ para todo *n* inteiro positivo.

PROBLEMA 6

O profeta venusiano Zabruberson enviou a seus discípulos uma palavra de 10000 letras, sendo cada uma delas A ou E: a *Palavra Zabrúbica*. Seus seguidores passaram a considerar, para $1 \le k \le 10000$, cada palavra formada por *k* letras consecutivas da Palavra Zabrúbica uma *palavra profética* de tamanho *k*. Sabe-se que há no máximo 7 palavras proféticas de tamanho 3. Determine o número máximo de palavras proféticas de tamanho 10.