XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Esmeralda escreve 2009^2 números inteiros em uma tabela com 2009 linhas e 2009 colunas, colocando um número em cada casa da tabela. Ela soma corretamente os números em cada linha e em cada coluna, obtendo 4018 resultados. Ela percebeu que os resultados são todos distintos. É possível que esses resultados sejam todos quadrados perfeitos?

PROBLEMA 2

Considere um primo q da forma $2p + 1$, sendo $p > 0$ um primo. Prove que existe um múltiplo de q cuja soma dos algarismos na base decimal é menor ou igual a 3.

PROBLEMA 3

São colocadas 2009 pedras em alguns pontos (x, y) de coordenadas inteiras do plano cartesiano. Uma operação consiste em escolher um ponto (a, b) que tenha quatro ou mais pedras, retirar quatro pedras de (a, b) e colocar uma pedra em cada um dos pontos

$$(a, b-1),\ (a, b+1),\ (a-1, b),\ (a+1, b).$$

Mostre que, após um número finito de operações, cada ponto terá no máximo três pedras. Além disso, prove que a configuração final não depende da ordem das operações.

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Mostre que existe um inteiro positivo n_0 com a seguinte propriedade: para qualquer inteiro $n \geq n_0$ é possível particionar um cubo em n cubos menores.

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. As retas AB e AC cortam o circuncírculo de OBC novamente em $B_1 \neq B$ e $C_1 \neq C$, respectivamente, as retas BA e BC cortam o circuncírculo de OAC em $A_2 \neq A$ e $C_2 \neq C$, respectivamente, e as retas CA e CB cortam o circuncírculo de OAB em $A_3 \neq A$ e $B_3 \neq B$, respectivamente. Prove que as retas A_2A_3, B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.

PROBLEMA 6

Seja $n > 3$ um inteiro fixado e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos. Encontre, em função de n, todos os possíveis valores reais de

$$\frac{x_1}{x_n + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n + x_1}$$