

**XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)**  
**PRIMEIRO DIA**

**PROBLEMA 1**

Encontre todas as funções  $f$  do conjunto dos reais nos conjuntos dos reais tais que

$$f(a + b) = f(ab)$$

para todos  $a, b$  irracionais.

**PROBLEMA 2**

Seja  $P(x)$  um polinômio com coeficientes reais. Prove que existem inteiros positivos  $n$  e  $k$  tais que  $k$  tem  $n$  dígitos e mais de  $P(n)$  divisores positivos.

**PROBLEMA 3**

Qual é a maior sombra que um cubo sólido de aresta 1 pode ter, no sol a pino?

*Observação:* Entende-se “maior sombra de uma figura no sol a pino” como a maior área possível para a projeção ortogonal da figura sobre um plano.

**XXXII OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)**  
**SEGUNDO DIA**

**PROBLEMA 4**

Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo e  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $CD$  e  $AD$ , respectivamente. As retas perpendiculares a  $AB$  passando por  $M$  e a  $BC$  passando por  $N$  cortam-se no ponto  $P$ . Prove que  $P$  pertence à diagonal  $BD$  se, e somente se, as diagonais  $AC$  e  $BD$  são perpendiculares.

**PROBLEMA 5**

Determine todos os valores de  $n$  para os quais existe um conjunto  $S$  de  $n$  pontos, sem que haja três deles colineares, com a seguinte propriedade: é possível pintar todos os pontos de  $S$  de modo que todos os ângulos determinados por três pontos de  $S$ , todos da mesma cor ou de três cores diferentes, não sejam obtusos. A quantidade de cores disponíveis é ilimitada.

**PROBLEMA 6**

Encontre todos os pares  $(a, b)$  de inteiros positivos tais que

$$3^a = 2b^2 + 1.$$