XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Dizemos que um número inteiro positivo é *chapa* quando ele é formado apenas por algarismos não nulos e a soma dos quadrados de todos os seus algarismos é também um quadrado perfeito. Por exemplo, 221 é chapa pois $2^2 + 2^2 + 1^2 = 9$ e todos os seus algarismos são não nulos, 403 não é chapa, pois, apesar de $4^2 + 0^2 + 3^2 = 5^2$, um de seus algarismos de 403 é nulo e 12 não é chapa pois $1^2 + 2^2 = 5$ não é quadrado perfeito.

Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um número chapa com exatamente n algarismos.

PROBLEMA 2

Um álbum, composto por 2011 figurinhas, está sendo colecionado por 33 amigos. Uma distribuição de figurinhas entre os 33 amigos é *incompleta* quando existe pelo menos uma figurinha que nenhum dos 33 amigos tem. Determinar o menor valor de m com a seguinte propriedade: toda distribuição de figurinhas entre os 33 amigos tal que, para quaisquer dois dos amigos, faltam, para ambos, pelo menos m figurinhas em comum, é incompleta.

PROBLEMA 3

Mostre que, para todo pentágono convexo $P_1P_2P_3P_4P_5$ de área 1, existem dois triângulos $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ e $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ (em que $P_6 = P_1$ e $P_7 = P_2$), formados por três vértices consecutivos do pentágono, tais que

$$\text{área } P_iP_{i+1}P_{i+2} \le \frac{5-\sqrt{5}}{10} \le \text{área } P_jP_{j+1}P_{j+2}$$

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Existem 2011 inteiros positivos $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2011}$ tais que, para todo $1 \le i < j \le 2011$, $\mathrm{mdc}(a_i, a_j) = a_j - a_i$?

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. As retas BH e CH cortam AC e AB em D e E, respectivamente. O circuncírculo de ADE corta o circuncírculo de ABC em $F \neq A$. Provar que as bissetrizes internas de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ se cortam em um ponto sobre o segmento BC.

PROBLEMA 6

Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2011}$ reais não negativos cuja soma é $\dfrac{2011}{2}$. Prove que

$$\left|\prod_{cíc}(x_i - x_{i+1})\right| = \left|(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)\ldots(x_{2009} - x_{2010})(x_{2010} - x_{2011})(x_{2011} - x_1)\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$