XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. Séries)

PROBLEMA 1

Considere as seguintes seqüências:

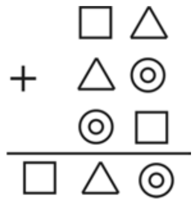
S_1: 12345678, 81234567, 78123456, ..., na qual o último algarismo do termo anterior (algarismo das unidades) torna-se o primeiro algarismo à esquerda do próximo termo.

S_2: 1234567898765, 5612345678987, 7856123456789, ..., na qual o algarismo das unidades torna-se o primeiro algarismo à esquerda do próximo termo, e o das dezenas torna-se o segundo algarismo à esquerda.

a) Apresente o quinto termo da seqüência S_1 e o quarto termo da seqüência S_2.
b) A seqüência S_1 tem 2006 termos. Qual é o seu último termo?
c) A seqüência S_2 termina quando o primeiro termo se repete. Quantos termos tem essa seqüência?

PROBLEMA 2

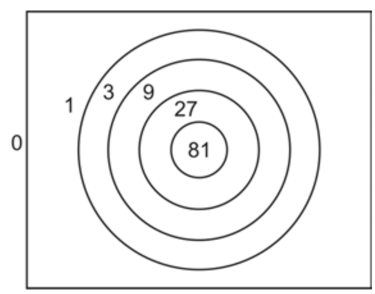
Na adição abaixo, cada símbolo representa um único algarismo e símbolos diferentes representam algarismos diferentes.



Determine o valor de cada símbolo, ou seja, descubra tais valores e mostre que não existem outras possibilidades.

PROBLEMA 3

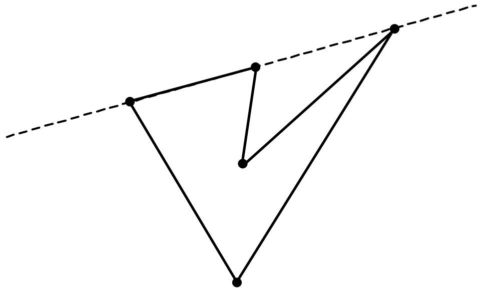
Um atirador lança flechas no alvo representado ao lado. Os números indicam a pontuação obtida em cada região atingida pela flecha (se a flecha acertar exatamente uma linha, a pontuação é a menor das duas regiões). Note que a região fora do retângulo não rende pontos.



a) Se numa competição, cada participante atira 2 flechas, quantas pontuações diferentes podem ser obtidas?
b) Numa outra competição, cada participante atirou 3 flechas. Curiosamente, não houve empates e todas as pontuações possíveis foram atingidas. Quantos participantes havia nesta competição?

PROBLEMA 4

Dentre os polígonos de 5 lados, o maior número possível de vértices alinhados, isto é, pertencentes a uma única reta, é três, como mostrado a seguir.



Qual é a maior quantidade de vértices alinhados que um polígono de 12 lados pode ter?

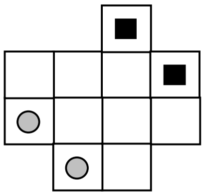
Atenção: além de desenhar um polígono de 12 lados com o número máximo de vértices alinhados, lembre-se de mostrar que não existe um outro polígono de 12 lados com mais vértices alinhados do que este.

PROBLEMA 5

A partir do tabuleiro mostrado nas figuras abaixo e quatro peças, duas circulares cinzas e duas quadradas pretas, Esmeraldinho inventou o seguinte jogo:

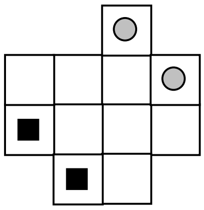
- Inicialmente, as peças são colocadas no tabuleiro como mostra a figura 1.

Figura 1

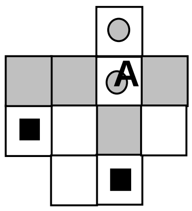


- A meta do jogo é, após um certo número de movimentos, trocar as peças de posição, chegando na situação mostrada na figura 2.

Figura 2



- Cada movimento consiste em mover uma das quatro peças uma ou mais casas acima, abaixo, à esquerda ou à direita; todavia, tal peça não pode "pular" nenhuma peça que, eventualmente, esteja no caminho, ou ocupar uma casa onde já existe uma peça. Por exemplo, a peça marcada com **A** só pode se mover para alguma das casas destacadas em cinza.



- Os movimentos dos círculos e dos quadrados são alternados. O jogo começa com um movimento de um dos quadrados.

Determine a menor quantidade total de movimentos necessários para terminar o jogo. Mostre, passo-a-passo, através de desenhos, como movimentar as peças com esta quantidade de movimentos e prove que não é possível terminar o jogo com menos movimentos.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Escrevemos, em fila, os números 1, 2, 3, …, n. A cada passo, tomamos os dois últimos números da fila anterior, escrevemos primeiramente o último, depois o penúltimo e, enfim, os outros $n - 2$, na ordem em que aparecem. Por exemplo, para $n = 12$ obtemos

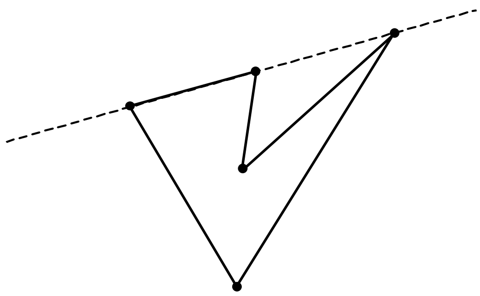
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \rightarrow 12, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$
$$\rightarrow 10, 9, 12, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow \ldots$$

Qual a menor quantidade de passos necessários para escrevermos novamente os números 1, 2, 3, …, n, nessa ordem, quando

(a) $n = 2006$?
(b) $n = 2005$?

PROBLEMA 2

Dentre os polígonos de 5 lados, o maior número possível de vértices alinhados, isto é, pertencentes a uma única reta, é três, como mostrado a seguir.



Qual é a maior quantidade de vértices alinhados que um polígono de 12 lados pode ter?

Atenção: além de desenhar um polígono de 12 lados com o número máximo de vértices alinhados, lembre-se de mostrar que não existe um outro polígono de 12 lados com mais vértices alinhados do que este.

PROBLEMA 3

Encontre todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros tais que $x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2)$.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Quantos subconjuntos $\{a, b, c\}$ de três elementos distintos de $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ são tais que b é a média aritmética de a e c ($a < b < c$)?

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo acutângulo e H o seu ortocentro. Sejam M, N e R os pontos médios de AB, BC e AH, respectivamente. Determine a medida do ângulo $M\hat{N}R$ se o ângulo $A\hat{B}C$ mede 70^o.

PROBLEMA 6

Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogo termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J_1, J_2, \ldots, J_k$ tais que J_1 ganhou de J_2, J_2 ganhou de J_3, J_3 ganhou de J_4, …, J_{k-1} ganhou de J_k, J_k ganhou de J_1.

Prove que existe um jogador que ganhou de todos os outros e existe um jogador que perdeu de todos os outros.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I seu incentro. Se $AP + AB = CB$, prove que API é um triângulo isósceles.

PROBLEMA 2

Seja n um inteiro, $n \geq 3$. Definimos $f(n)$ como a maior quantidade possível de triângulos isósceles cujos vértices pertencem a algum conjunto de n pontos do plano sem três pontos colineares. Prove que existem constantes positivas a e b tais que $an^2 < f(n) < bn^2$, para todo n inteiro, $n \geq 3$.

PROBLEMA 3

Determine todas as funções $f : R \to R$ tais que

$$f\left(xf(y) + f(x)\right) = 2f(x) + xy$$

para todos x, y reais.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Um número inteiro positivo é *arrojado* quando tem 8 divisores positivos cuja soma é 3240. Por exemplo, o número 2006 é arrojado porque seus 8 divisores positivos, 1, 2, 17, 34, 59, 118, 1003 e 2006, somam 3240. Encontre o menor número inteiro positivo arrojado.

PROBLEMA 5

Seja P um polígono convexo de 2006 lados. As 1003 diagonais ligando vértices opostos e os 1003 segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos são concorrentes, ou seja, todos os 2006 segmentos possuem um ponto em comum. Prove que os lados opostos de P são paralelos e congruentes.

PROBLEMA 6

O professor Piraldo participa de jogos de futebol em que saem muitos gols e tem uma maneira peculiar de julgar um jogo. Um jogo com placar de m gols a n gols, $m \geq n$, é dito *equilibrado* quando $m \leq f(n)$, sendo $f(n)$ definido por $f(0) = 0$ e, para $n \geq 1$, $f(n) = 2n - f(r) + r$, onde r é o maior inteiro tal que $r < n$ e $f(r) \leq n$.

Sendo $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, prove que um jogo com placar de m gols a n, $m \geq n$, está equilibrado se $m \leq \phi n$ e não está equilibrado se $m \geq \phi n + 1$.