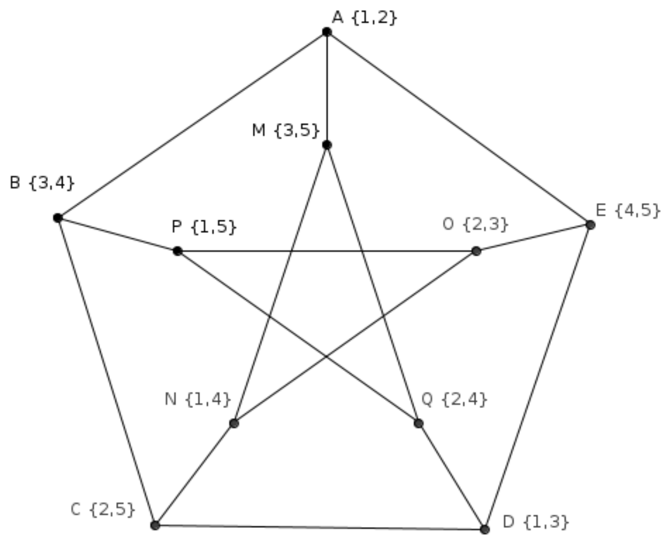
35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º ano do Ensino Fundamental)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Arnaldo desenha um pentágono regular *ABCDE* e, em seguida, desenha uma estrela de 5 pontas *MNOPQ*. Depois disso, ele liga os segmentos *AM, BP, CN, DQ* e *EO*. Na figura formada, dizemos que dois vértices são *vizinhos* se existe um segmento ligando os dois.

Bernaldo percebe que é possível colocar todos os 10 subconjuntos de 2 elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5} nos 10 vértices da figura formada de tal forma que os subconjuntos colocados em dois vértices vizinhos tem interseção vazia. Uma tal associação é dita *curiosa* e um exemplo é dado abaixo:



a) Dê mais um exemplo de associação curiosa.

b) Determine a quantidade de associações curiosas existentes.

PROBLEMA 2

a) Encontre todos os inteiros positivos n tais que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 2013$.

b) Sejam a e b inteiros positivos tais que $\lfloor \sqrt{ab} \rfloor = \lfloor \sqrt{a} \rfloor \cdot \lfloor \sqrt{b} \rfloor$. Prove que pelo menos um dos dois inteiros positivos deve ser quadrado perfeito.

Para um número real *x*, o número $\lfloor x \rfloor$ é definido como o maior inteiro menor ou igual a *x*.

PROBLEMA 3

Seja ABC um triângulo. Seja *D* um ponto na circunferência circunscrita ao triângulo e sejam *E* e *F* os pés das perpendiculares de *A* até *DB* e *DC*, respectivamente. Finalmente, seja *N* o ponto médio de *EF*. Sendo *M* o ponto médio do lado *BC*, prove que as retas *NA* e *NM* são perpendiculares.

Observação: Suponha que o ponto *N* é distinto do ponto *M*.

35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º ano do Ensino Fundamental)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Dado um número de dois dígitos chamamos de seu *quadroido* o número formado juntando os quadrados de seus dígitos na mesma ordem do número. Por exemplo, os quadroidos de 19, 72, 65 e 23 são 181, 494, 3625 e 49, respectivamente. Ache todos os números de dois dígitos que dividem seu quadroido.

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo escaleno e AM a mediana relativa ao lado BC. A circunferência de diâmetro AM intersecta pela segunda vez os lados AB e AC nos pontos P e Q, respectivamente, ambos diferentes de A. Supondo que PQ é paralelo a BC, determine a medida do ângulo $\angle BAC$.

PROBLEMA 6

Considere um inteiro positivo n e dois pontos A e B em um plano. Partindo do ponto A, são traçadas n semirretas e partindo do ponto B, são traçadas n semirretas de modo que todas elas estejam no mesmo semiplano definido pela reta AB e que os ângulos formados pelas $2n$ semirretas com o segmento AB sejam todos agudos. Defina circunferências passando pelos pontos A, B e cada ponto de encontro entre as semirretas. Qual a menor quantidade de circunferências **distintas** que podem ser definidas por essa construção?