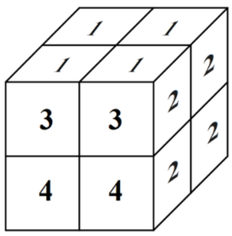
36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º anos)
PRIMEIRO DIA
Sábado, 25 de outubro de 2014

PROBLEMA 1

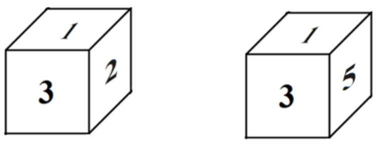
Um dado comum de jogo é um cubo em que as faces possuem os números de 1 até 6, no qual os números em faces opostas somam 7. Colando-se oito dados, monta-se um *superdado* que é um cubo em que cada face é composta por quatro faces dos dados menores. Sabe-se também que duas faces dos dados menores que foram coladas para formar o superdado tem necessariamente o mesmo número. Observe que faces coladas não podem ser mais vistas e os números iguais em cada face podem estar invertidos ou deitados.

a) Qual a soma dos números das seis faces do superdado abaixo?



b) Monte um superdado com soma dos números das seis faces igual a 106.

Observação: existem dois dados de jogo possíveis, mudando apenas as faces que possuem o 2 e o 5, como na figura a seguir, você pode usar cada um dos dois quantas vezes achar necessário.



PROBLEMA 2

Sejam AB um diâmetro da circunferência Γ e CD uma corda perpendicular a tal diâmetro. Sejam ainda E o ponto de interseção entre CD e AB e P um ponto qualquer sobre a corda CD diferente de E. As retas AP e BP intersectam Γ novamente em F e G, respectivamente. Se O é o circuncírculo do triângulo EFG, mostre que a área do triângulo OCD é sempre a mesma para qualquer que seja o ponto P escolhido.

PROBLEMA 3

Encontre todos os inteiros n, $n > 1$, com a seguinte propriedade: para todo k, $0 \leq k < n$, existe um múltiplo de n cuja soma dos algarismos, na base decimal, deixa resto k na divisão por n.

36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º anos)
SEGUNDO DIA
Domingo, 26 de outubro de 2014

PROBLEMA 4

Considere um quadrado $ABCD$ de centro O. Sejam E, F, G e H pontos no interior dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, tal que $AE = BF = CG = DH$. Sabe-se que OA intersecta HE no ponto X, OB intersecta EF no ponto Y, OC intersecta FG no ponto Z e OD intersecta GH no ponto W. Dado que $\text{Área } EFGH = 1$, calcule

$$(\text{Área } ABCD) \times (\text{Área } XYZW)$$

PROBLEMA 5

Sejam p e q inteiros. Sabendo que $x^2 + px + q$ é positivo para todo x inteiro, prove que a equação $x^2 + px + q = 0$ não possui solução real.

PROBLEMA 6

Em cada casa de um tabuleiro $2m \times 2n$ está escrito um inteiro. A operação permitida é escolher três casas formando uma figura congruente a um L-triminó, como indicado na figura abaixo, e somar 1 ao inteiro em cada uma das três casas. Determine a condição necessária e suficiente, em função de m, n e dos números iniciais, para que seja possível deixar todos os números iguais.