37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º Anos do Ensino Fundamental)
PRIMEIRO DIA
Sábado, 17 de outubro de 2015

PROBLEMA 1

Prove que existe um número que pode ser representado de pelo menos 2015 maneiras diferentes como soma de quadrados de números naturais não nulos, não necessariamente todos distintos. Considera-se que duas somas que alteram apenas a ordem das parcelas constituem uma mesma representação.

Por exemplo, $1^2+1^2+3^2+3^2+7^2+10^2$ e 5^2+12^2 são duas maneiras distintas de escrevermos 169 como soma de quadrados.

PROBLEMA 2

Seja *ABCD* um quadrilátero convexo. As retas *AB* e *CD* cortam-se em *E* e as retas *BC* e *AD* cortam-se em *F*. Sejam *P* e *Q* os pés das perpendiculares de *E* sobre as retas *AD* e *BC*, respectivamente, e sejam *R* e *S* os pés das perpendiculares de *F* sobre as retas *AB* e *CD*, respectivamente. As retas *ER* e *FS* se cortam em *T*.

a) Mostre que há uma circunferência que passa pelos pontos *E*, *F*, *P*, *Q*, *R* e *S*.

b) Prove que a circunferência que passa pelos vértices do triângulo *RST* é tangente à circunferência que passa pelos vértices do triângulo *QRB*.

PROBLEMA 3

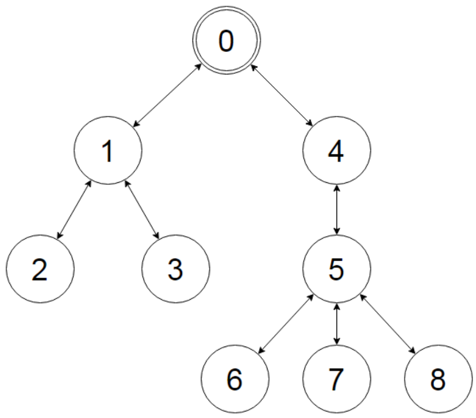
Seja ABC um triângulo e n um inteiro positivo. Sobre o lado BC considere os pontos A_1, A_2, ..., A_{2^n-1} que dividem o lado em 2^n partes iguais, ou seja, $BA_1=A_1A_2=\cdots=A_{2^n-2}A_{2^n-1}=A_{2^n-1}C$. Defina os pontos B_1, B_2, ..., B_{2^n-1} e C_1, C_2, ..., C_{2^n-1} sobre os lados CA e AB, respectivamente, de maneira análoga. Trace os segmentos AA_1, AA_2, ..., AA_{2^n-1}, BB_1, BB_2, ..., BB_{2^n-1} e CC_1, CC_2, ..., CC_{2^n-1}. Determine, em função de n, em quantas regiões foi dividida a região delimitada pelo triângulo ABC por esses segmentos.

37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º Anos do Ensino Fundamental)
SEGUNDO DIA
Domingo, 18 de outubro de 2015

PROBLEMA 4

No país Arnaldos Unidos, existem n cidades conectadas por $n-1$ estradas e, a partir de qualquer cidade, é possível chegar até a capital Arnaldópolis usando as estradas.

Durante os $n-1$ primeiros dias do ano, uma das estradas é escolhida em cada dia e tem o seu tráfego interrompido para passar por uma reforma que durará pelo menos n dias. Durante qualquer momento desse processo, chamaremos uma cidade de *folha* se ela não for a capital e estiver conectada a apenas uma outra cidade por uma estrada que não teve seu tráfego interrompido. Para minimizar os transtornos, uma estrada só pode ser reformada uma única vez e, além disso, apenas quando uma das cidades que ela conecta é uma folha. Por exemplo, no mapa a seguir em que a cidade 0 é a capital Arnaldópolis, as cidades 2, 3, 6, 7 e 8 são folhas. Veja que uma reforma iniciada na estrada entre as cidades 1 e 2 reduz o número de folhas de 5 para 4 e que uma reforma no dia seguinte na estrada entre as cidades 1 e 3 mantém o número de folhas constante e igual a 4.



a) No mapa acima, com $n = 9$ cidades, determine uma ordem apropriada de reformas para as 8 estradas e, em seguida, determine o número de dias em que a quantidade de folhas não é alterada durante o processo de reformas.

b) Supondo agora que $n = 230$ e que existem inicialmente 69 folhas, determine o número de dias em que a quantidade de folhas não é alterada durante um processo qualquer de reformas envolvendo todas as estradas nos primeiros 229 dias do ano.

PROBLEMA 5

Seja n um inteiro positivo e sejam $n = d_1 > d_2 > \ldots > d_k = 1$ seus divisores positivos.

a) Prove que

$$d_1 - d_2 + d_3 - \ldots + (-1)^{k-1} d_k = n - 1$$

apenas se n é primo ou $n = 4$.

b) Determine os três inteiros positivos n para os quais

$$d_1 - d_2 + d_3 - \ldots + (-1)^{k-1} d_k = n - 4\,.$$

PROBLEMA 6

Seja ABC um triângulo escaleno e AD, BE e CF as bissetrizes internas, com D sobre BC, E sobre AC e F sobre AB. É dado que $\angle AFE = \angle ADC$. Calcule a medida do ângulo $\angle BCA$.