35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja Γ um círculo e A um ponto exterior a Γ. As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C. Seja M o ponto médio de AB. O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E. Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b.

PROBLEMA 2

Arnaldo e Bernaldo fazem a seguinte brincadeira: dado um conjunto finito de inteiros positivos A fixado, que os dois conhecem, Arnaldo escolhe um número a pertencente a A, mas não conta a ninguém qual número escolheu. Em seguida, Bernaldo pode escolher um inteiro positivo b qualquer (b pode pertencer a A ou não). Então Arnaldo fala apenas o número de divisores inteiros positivos do produto ab. Mostre que Bernaldo pode escolher b de modo que consiga descobrir o número a escolhido por Arnaldo.

PROBLEMA 3

Encontre todas as funções injetoras f dos reais não nulos nos reais não nulos tais que

$$f(x+y)\cdot\big(f(x)+f(y)\big)=f(x\cdot y)$$

para todos x, y reais não nulos com $x+y\neq 0$.

35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Encontrar o maior valor de *n* para o qual existe uma sequência $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$ de algarismos não nulos (ou seja, $a_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$) tal que, para todo $k, 1 \le k \le n,$ o número de *k* dígitos $(a_{k-1}a_{k-2}...a_0) = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + ... + a_0$ divide o número de *k* + 1 algarismos $(a_k a_{k-1} a_{k-2}...a_0)$.

PROBLEMA 5

Seja *x* um número irracional entre 0 e 1 e $x = 0, a_1a_2a_3...$ sua representação decimal. Para cada $k \ge 1,$ seja $p(k)$ a quantidade de sequências distintas $a_{j+1}a_{j+2}...a_{j+k}$ de *k* algarismos consecutivos na representação decimal de *x*. Prove que $p(k) \ge k+1$ para todo *k* inteiro positivo.

PROBLEMA 6

O incírculo do triângulo *ABC* toca os lados *BC*, *CA* e *AB* nos pontos *D*, *E* e *F* respectivamente. Seja *P* o ponto de interseção das retas *AD* e *BE*. As reflexões de *P* em relação a *EF*, *FD* e *DE* são *X*, *Y* e *Z*, respectivamente. Prove que as retas *AX*, *BY* e *CZ* têm um ponto comum pertencente à reta *IO*, sendo *I* e *O* o incentro e o circuncentro do triângulo *ABC*.