

37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA
Sábado, 17 de outubro de 2015

PROBLEMA 1

Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C . Prove que A , D e N são colineares se, e somente se, $\angle BAC = 45^\circ$.

PROBLEMA 2

Seja $S = \{1, 2, 3, \dots, 6n\}$, $n > 1$. Encontre o maior valor de k para o qual a seguinte afirmação é verdadeira: todo subconjunto A de S com $4n$ elementos tem pelo menos k subconjuntos $\{a, b\}$ com $a < b$ e b múltiplo de a .

PROBLEMA 3

Dado um natural $n > 1$ e sua fatoração em primos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, sua *falsa derivada* é definida por

$$f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} \dots \alpha_k p_k^{\alpha_k - 1}.$$

Prove que existem infinitos naturais n tais que $f(n) = f(n - 1) + 1$.

37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA
Domingo, 18 de outubro de 2015

PROBLEMA 4

Seja n um inteiro positivo e sejam $n = d_1 > d_2 > \dots > d_k = 1$ seus divisores positivos.

a) Prove que

$$d_1 - d_2 + d_3 - \dots + (-1)^{k-1} d_k = n - 1$$

se, e somente se, n é primo ou $n = 4$.

b) Determine os três inteiros positivos n para os quais

$$d_1 - d_2 + d_3 - \dots + (-1)^{k-1} d_k = n - 4.$$

PROBLEMA 5

É verdade que existem um polinômio $f(x)$ de coeficientes racionais, nem todos inteiros, de grau $n > 0$, um polinômio $g(x)$, com todos os coeficientes inteiros, e um conjunto S com $n + 1$ inteiros tais que $g(t) = f(t)$ para todo $t \in S$?

PROBLEMA 6

Seja ABC um triângulo escaleno e X, Y e Z pontos sobre as retas BC, CA, AB , respectivamente, tais que $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Os circuncírculos de BXZ e CXY se cortam em $P \neq X$. Prove que P está sobre a circunferência cujo diâmetro tem extremidades no ortocentro H e no baricentro G de ABC .