XIX Semana Olímpica de Matemática

Nível 3

A inversão \sqrt{bc} que não muda ABC

Carlos Shine

O projeto da XIX Semana Olímpica de Matemática foi patrocinado por:

impa
instituto nacional de matemática pura e aplicada

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

fundação lemann

A “inversão” $\sqrt{bc}$ que quase não muda ABC

Carlos Shine

1 Serviço de utilidade pública

Antes de começar qualquer aula de geometria, sempre é bom ressaltar:

Faça uma boa figura!!

Primeiro, vamos definir o que é uma “boa figura”. Uma boa figura:

- é feita com régua e compasso;
- é grande (uma folha inteira);
- deixa um bom espaço para marcar ângulos e traçar segmentos adicionais;
- não deixa pontos muito próximos um do outro;
- não é próxima de casos particulares notáveis (triângulo equilátero, isósceles, retângulo).

Uma boa regra é que se você começa a relutar a marcar coisas na sua figura, está na hora de fazer outra figura. **Não hesite em fazer várias figuras**. Muitas vezes, depois de progredir no problema, algumas partes da figura são inúteis, e devem ser eliminadas. Por isso, você não deve se contentar em fazer uma figura só.

Entre as razões para fazer uma boa figura estão:

- Você se certifica de que não leu o enunciado errado.
- Você se certifica de que não fez a figura errada.
- Ao entender como se faz uma certa construção você pode ter uma ideia melhor de como resolver o problema.
- Ao se obrigar a pensar em como fazer a figura você já está pensando no problema, ou seja, fazer uma boa figura não é uma perda de tempo.
- Uma boa figura permite fazer conjecturas que não são óbvias com uma figura imprecisa. Note que isso é útil mesmo se sua técnica favorita[1] for fazer contas: você pode provar a conjectura, que talvez você não encontrasse sem a boa figura, com contas!

É claro que há desvantagens em boas figuras (nada é 100% perfeito):

- A figura pode levar a conjecturas falsas – nesse caso, é sempre bom fazer outra figura, com parâmetros iniciais bem diferentes, para verificar.
- A figura pode levar a usar o que deve ser provado. Isso acontece bastante quando se quer provar que um triângulo ou quadrilátero geral é uma figura especial (por exemplo, provar que um quadrilátero é um losango). Nesse caso, é melhor fazer uma figura “errada” e tentar entender por que ela dá errado.

[1] Mas tenha em mente que sempre vão existir **vários** problemas que não saem com sua técnica favorita, seja ela fazer contas, projetiva, inversão etc etc.

2 Alguns pré-requisitos

2.1 Inversão

2.1.1 Definição

Uma *inversão de centro ou polo O e raio r* é uma transformação que leva o ponto $P \neq O$ para P' sobre a semirreta OP tal que $OP \cdot OP' = r^2$. O nome "inversão" faz sentido se você notar que $OP' = \frac{r^2}{OP}$ (aqui, adotamos r como a "unidade").

Note que os pontos sobre o círculo de centro O e raio r são fixados pela inversão, então você também pode fazer inversão com relação a um círculo (o Geogebra chama inversão de "reflexão com relação a um círculo", por motivos que veremos em breve).

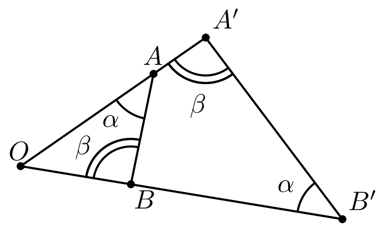
2.1.2 Propriedades com um ou dois pontos

Fato 1 (Propriedades com um ou dois pontos)**.** *Denote por P' o inverso de P e por O e r o centro e o raio da inversão, respectivamente. Então*

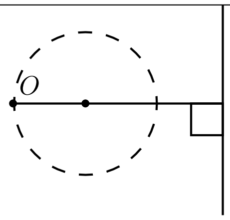
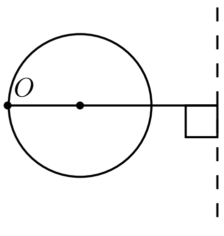
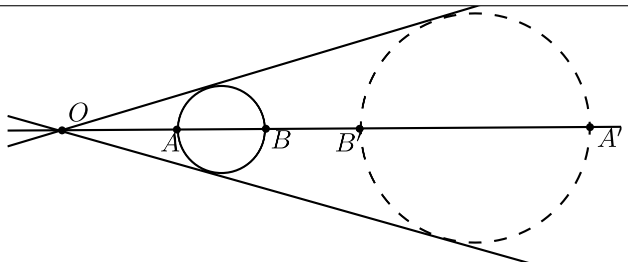
2.1 ***Inverso do inverso**: $(P')' = P$.*

2.2 ***Troca de ângulos**: $\angle OAB = \angle OB'A'$ e $\angle OBA = \angle OA'B'$. Isso também mostra que A, B, A' e B' são concíclicos e que os triângulos OAB e $OB'A'$ são semelhantes (note a ordem invertida).*

2.3 ***Distância entre inversos**: $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.*



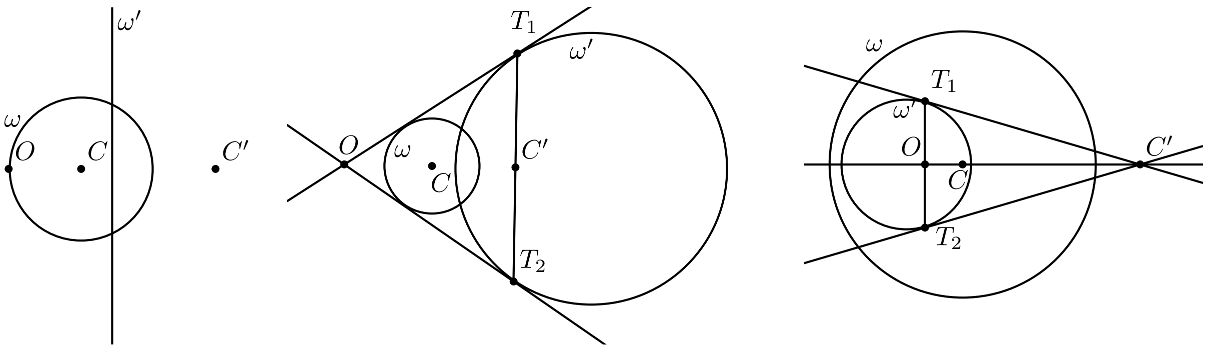
2.1.3 Inverso de retas e círculos

	O está sobre a figura	O não está sobre a figura
reta	Reta se mantém	
círculo		

Algo importante é que o inverso do centro de círculo não vai para o centro do inverso do círculo. Sendo mais específico:

Fato 2. *O inverso do centro C de um círculo ω é:*

- *o simétrico do polo de inversão com relação a ω' se esta for uma reta;*
- *o ponto médio dos pontos de tangência das retas tangentes a ω' que passam pelo polo, se o polo está no exterior de ω';*
- *a interseção das tangentes a ω' pelas interseções da perpendicular a OC por O, sendo O o polo de inversão, se ele estiver no interior de ω'.*



ω' é reta *O no exterior de ω'* *O no interior de ω'*

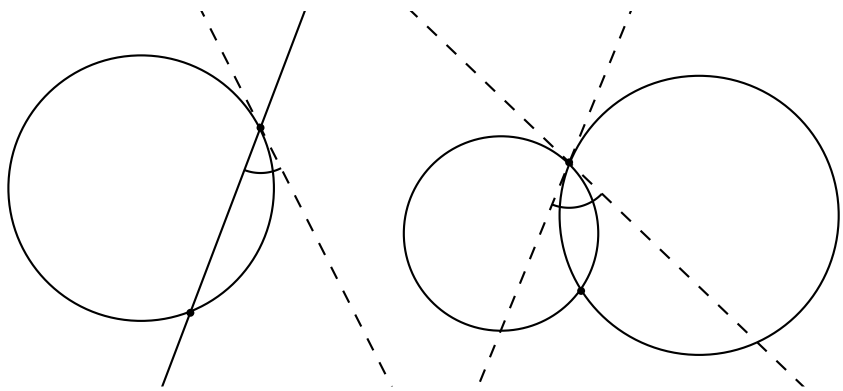
Demonstração. Para o caso da reta, basta ver que, sendo P o ponto diametralmente oposto a O em ω, $OC \cdot OC' = OP \cdot OP' \implies OC' = 2OP'$, em que P' é a interseção de OC e ω'.

No segundo caso, usamos a troca de ângulos: sendo T_1' o inverso de T_1, $\angle OC'T_1 = \angle OT_1'C = 90°$.

No terceiro caso, basta notar que circuncírculo OCT_1' é o círculo de diâmetro CT_1', que é tangente a ω. Logo $C'T_1$ é tangente a ω'.

2.1.4 Invariante de ângulos

Ângulo entre curvas em um ponto P é o ângulo entre as retas tangentes às curvas em P.



Um caso particular bacana é quando esse ângulo é 90°; nesse caso, dizemos que as figuras são *ortogonais.* Retas ou círculos ortogonais ao círculo de inversão são fixados, ou seja, se mantém o mesmo após invertidas.

Pode-se provar que

Fato 3 (Invariante de ângulos na inversão)**.** *Ângulos entre figuras se mantém após serem invertidas.*

2.1.5 Círculos coaxiais na inversão

Devido à definição de inversão com multiplicação de segmentos, potências de ponto têm tudo a ver com inversão.

Fato 4. *Sendo σ uma inversão com círculo ω e γ um círculo qualquer, ω, γ e $\sigma(\gamma) = \gamma'$ têm um eixo radical em comum, ou seja, são coaxiais.*

Demonstração. A demonstração é simples se ω e γ se intersectam: essas interseções são fixadas por σ e pertencem aos três círculos. Caso contrário, considere o ponto T sobre a reta que liga os centros de ω e γ que está no eixo radical desses dois círculos e trace as tangentes a esses círculos. Note que existe um círculo τ com centro T com raio igual aos segmentos tangentes, e como esse círculo é ortogonal a ω, ele se mantém na inversão, ou seja, $\tau' = \tau$. Esse círculo é também ortogonal a γ e, portanto, a γ', pelo invariante de ângulos. Assim a tangente por T também tem o mesmo comprimento, e o resultado segue. □

2.1.6 Composição de inversões

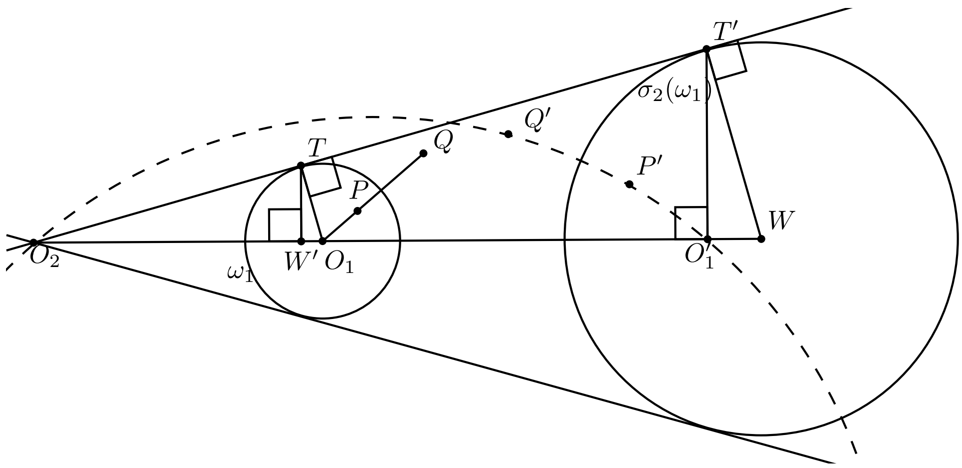
Como é a composição de inversões? O resultado da composição é um pouco complicado (é, em geral, a *transformação de Moebius*), mas há um resultado bonitinho para pontos inversos entre si na primeira inversão.

Lema 1. Sejam σ_1, de círculo ω_1, e σ_2, de círculo ω_2, duas inversões, $P \neq O_2$ um ponto qualquer e $Q = \sigma_1(P)$ o inverso de P com relação a ω_1. Então $\sigma_2(Q)$ é o inverso de $\sigma_2(P)$ na inversão de círculo $\sigma_2(\omega_1)$, se esta for um círculo, ou $\sigma_2(Q)$ é o simétrico de $\sigma_2(P)$ com relação a $\sigma_2(\omega_1)$, se esta for uma reta.[2]

Esse lema é menos conhecido, então vamos prová-lo.

Demonstração. Denote $X' = \sigma_2(X)$.

Começamos com o caso em que $\sigma_2(\omega_1)$ é um círculo de centro W. Sejam T e T' os pontos de tangência da reta tangente a ω_1 (e a $\sigma_2(\omega_1)$) nesses dois círculos, respectivamente. Então $O_2T \cdot O_2T' = r_2^2$, em que r_2 é o raio de ω_2. Pela troca de ângulos, $\angle O_2O_1'T' = \angle O_2TO_1 = 90°$; analogamente, $\angle O_2W'T = 90°$.

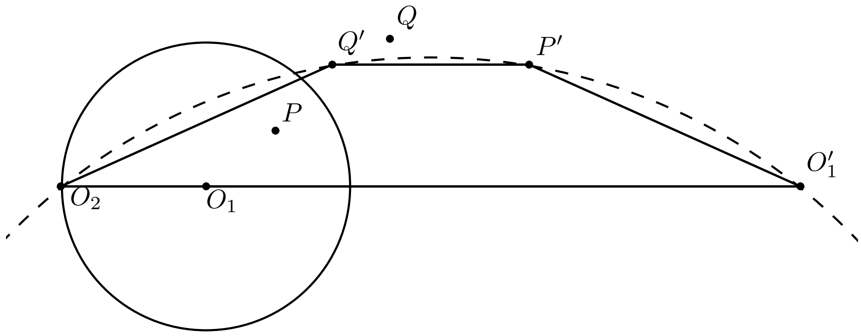


Primeiro note que, pelas relações métricas no triângulo retângulo O_1O_2T, $O_1W' \cdot O_1O_2 = O_1T^2 = O_1P \cdot O_2Q$, portanto W', O_2, P e Q são concíclicos. Então σ_2 leva W, P' e Q' para uma reta; finalmente, como O_1, P e Q são colineares, O_2, P', Q' e O_1' são concíclicos. Por potência de ponto, $WP' \cdot WQ' = WO_1' \cdot WO_2 = WT'^2$, em que na última passagem usamos as relações métricas no triângulo retângulo O_2WT'. Isso prova o resultado.

[2] Daí o nome "reflexão por círculo" para inversão.

Se não existir a tangente comum, o resultado continua valendo, pois as relações $O_1W' \cdot O_1P_2 = O_1P \cdot O_1Q$ e $WP' \cdot WQ' = WO_1' \cdot WO_2'$ continuam valendo.

No caso em que $\sigma_2(\omega_1)$ é uma reta r, basta notar que O_1' é o simétrico de O_2 com relação a r, e que $\angle(P'Q', r) = \angle(P'Q', \omega_1') = \angle(PQ, \omega_1) = 90°$, ou seja, $P'Q' \parallel O_2O_1'$. Mas O_1, P e Q são colineares, logo O_2, O_1', P' e Q' são concíclicos, e formam um trapézio. Isso só ocorre se $P'Q'$ e O_2O_1' têm a mesma mediatriz, que já provamos que é r.



□

2.2 Roto-homotetia

Uma roto-homotetia com centro O, ângulo α, e razão k é uma rotação de centro O e ângulo α (medido no sentido anti-horário – se for horário, tomamos $\alpha < 0$) seguido de uma homotetia de razão k.

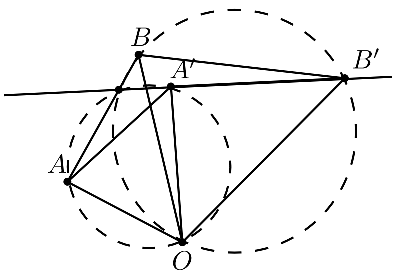
2.2.1 Propriedades

Fato 5 (Semelhanças automáticas). *Seja σ uma roto-homotetia de centro O, ângulo α e razão k. Denote $A' = \sigma(A)$. Então*

2.1 Todos os triângulos OAA' são semelhantes.

2.2 Os triângulos OAB e $OA'B'$ são semelhantes.

2.3 Os seguintes conjuntos de pontos são concíclicos: $\{O, A, B\} \cup \{AA' \cap BB'\}$, $\{O, A', B'\} \cup \{AA' \cap BB'\}$, $\{O, A, A'\} \cup \{AB \cap A'B'\}$ e $\{O, B, B'\} \cup \{AB \cap A'B'\}$. Ou seja, os circuncírculos de OAA' e OBB' se cortam em $AB \cap A'B'$. Você pode usar essa propriedade para encontrar o centro de roto-homotetia em maioria dos casos.



3 A "inversão" $\sqrt{bc}$

Primeiro, vamos explicar as aspas.

Seja ABC um triângulo. Defina f como a inversão com centro A e raio $\sqrt{AB \cdot AC}$ seguida de uma reflexão com relação à bissetriz interna de $\angle A$. Note que f *não é uma inversão*.

Em muitos problemas não misturamos a figura inversa com a original. Faremos uma exceção aqui, e encontraremos várias propriedades bacanas. Vamos fazer isso na forma de exercícios.

3.1 Exercícios

Nos próximos exercícios, denotaremos $f(P)$ por P' também.

3.1 Faça uma boa figura, indicando ABC e mais dois pontos P e Q do plano. Nos próximos exercícios, desenhe $f(P)$ e $f(Q)$ na figura geometricamente, ou seja, com régua e compasso.

3.2 Calcule $f(B)$ e $f(C)$.

3.3 Qual é a imagem de BC?

3.4 Qual é a imagem do circuncírculo de ABC?

3.5 Qual é a imagem do triângulo ABC? (Não é o próprio triângulo ABC).

3.6 (Propriedade para um ponto) Sendo P um ponto qualquer que não pertence a AB ou AC, mostre que ABP é semelhante a $AP'C$. Como você construiria $f(P)$ usando roto-homotetia?

3.7 (Propriedades para dois pontos) Sejam P e Q pontos quaisquer.

(a) Supondo que A, P e Q' não estão alinhados, mostre que APQ' e AQP' são semelhantes.

(b) Quais roto-homotetias são úteis nessa ocasião?

(c) O que você pode dizer sobre os pontos P, Q, P' e Q'?

(d) Calcule a distância $P'Q'$.

3.8 (Conjugados isogonais) Sendo P um ponto não pertencente ao circuncírculo e nem a AB e ABC, e P^{-1} seu conjugado isogonal com relação a ABC, mostre que B, C, $f(P)$ e P^{-1} são concíclicos. Conjugando, é claro que isso significa que B, C, P e $f(P^{-1})$ são concíclicos também.

3.9 Encontre $f(X)$, em que X é (a) circuncentro; (b) ortocentro.

3.10 Encontre $f(I)$, $f(I_a)$, $f(I_b)$ e $f(I_c)$, sendo I, I_a, I_b, I_c o incentro e os ex-incentros.

3.11 Encontre a imagem do círculo dos nove pontos.

3.2 Problemas

Agora vamos aplicar o que foi feito nos exercícios para resolver alguns problemas. Numa prova, as propriedades que você provou acima devem ser demonstradas.

3.12 Sejam O o circuncentro e I o incentro do triângulo ABC. Um círculo tangencia o lado AB em K, o lado BC em L e o circuncírculo de AOC externamente. Prove que a reta KL passa pelo ponto médio de BI.

3.13 Seja O o circuncentro do triângulo acutângulo ABC. O circuncírculo de BOC e o círculo que passa por A e C e é tangente a AB se cortam em $T \neq A$. As retas TO e BC se cortam em K. Prove que AK é tangente ao circuncírculo de ABC.

3.14 (Rússia 2009) O triângulo ABC tem bissetriz interna D, com D sobre AC. A reta BD corta o circuncírculo Ω de ABC em $E \neq B$. O círculo ω com diâmetro DE corta Ω novamente em F. Prove que BF é simediana do triângulo ABC.

3.15 Sejam ω o circuncírculo de ABC e r a reta tangente a ω que passa por A. Os círculos ω_1 e ω_2 tangenciam r, a reta BC e ω externamente. Sejam D e E os pontos de tangência de ω_1 e ω_2 em BC. Prove que os circuncírculos de ABC e ADE são tangentes.

3.16 Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O e altura BE. Seja ω o círculo de centro E e raio BE. O circuncírculo de AOC corta AB em $P \neq A$ e BC em $Q \neq C$. Prove que P, Q e E são colineares se, e somente se, o circuncírculo de AOC é tangente a ω.

3.17 (RMM 2011) O triângulo ABC está inscrito no círculo ω. Uma reta variável ℓ paralela a BC corta os segmentos AB e AC em D e E, respectivamente, e corta ω em K e L, sendo que D está entre K e E. O círculo γ_1 é tangente aos segmentos KD e BD e a ω; o círculo γ_2 é tangente aos segmentos LE e CE e a ω. Determine o lugar geométrico, ao variarmos ℓ, dos pontos de interseção da tangentes comuns internas de γ_1 e γ_2.

3.18 O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB em P, Q e R, respectivamente. Suponha que as retas PQ e AB se cortam em D e as retas QR e AC se cortam em E. Sendo I o incentro de ABC, prove que os circuncírculos de PQE, PRD e AIP têm dois pontos em comum.[3]

3.19 Seja P um ponto sobre o circuncírculo de ABC. A reta PA corta BC em A_1, a reta PB corta AC em B_1 e PC corta AB em C_1. Uma inversão no circuncírculo leva A_1, B_1 e C_1 a A_2, B_2 e C_2, respectivamente. Prove que as retas AA_2, BB_2 e CC_2 concorrem em um ponto cujo conjugado isogonal pertence ao círculo dos nove pontos de ABC.

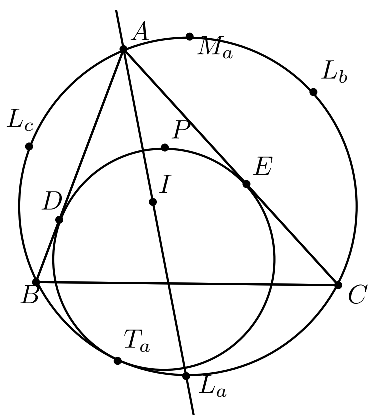
3.20 No triângulo ABC, AD é uma altura e M é o ponto médio de AD. Sejam X e Y as projeções ortogonais de D sobre CM e BM, respectivamente. As retas BX e CY se cortam em Z. Prove que o circuncírculo XYZ e o círculo de diâmetro AD são tangentes.

4 f do incírculo e do A-exincírculo: círculos mixtilineares

Qual é a imagem do incírculo? Como pontos mais próximos são levados a pontos mais distintos pela inversão, f inverte posição relativa com relação ao polo A. A imagem é bem interessante: é um círculo tangente a $f(AB) = AC$, $f(AC) = AB$ e $f(BC)$, o circuncírculo de ABC, mas externamente. Esse é o A-*excírculo mixtilinear.*

Analogamente, você pode provar que f leva o A-exincentro a um círculo tangente a AB, AC e *internamente* ao circuncírculo de ABC. Esse é o A-*incírculo mixtilinear.*

Na figura a seguir, temos o A-incírculo mixtilinear, os seus pontos de tangência com os lados AB e AC e com o circuncírculo, o incentro I, os pontos médios L_a, L_b e L_c dos arcos BC, CA, AB que não contêm o outro vértice, e o ponto médio M_a do arco BC que contém A.



Essa figura tem muitas propriedades. Mais exercícios!

[3]Esse problema também vale trocando "incírculo" por "A-exincírculo" e I por I_a.

4.1 Exercícios

4.1 (Estrela da Morte) Prove que T_a, D e L_a são colineares.

4.2 Prove que I é o ponto médio de DE.

4.3 Seja X_a o ponto de tangência do incírculo com o lado BC e K_a o pé da bissetriz interna de A em BC. Prove que $X_aK_aL_aT_a$ é cíclico.

4.4 Sejam X_a e K_a como no exercício anterior. Prove que $\angle AT_aB = \angle CT_aK_a$.

4.5 Seja Y_a o ponto de tangência do A-exincírculo com o lado BC. Prove que $\angle BAT_a = \angle CAY_a$.

4.6 Prove que $\angle L_cT_aA = \angle IT_aL_b$.

4.7 Prove que T_aI é a bissetriz interna de $\angle BT_aC$.

4.8 Prove que T_aBDI é cíclico (analogamente, T_aCEI é também cíclico).

4.9 Prove que BI é tangente ao círculo T_aCEI.

4.10 Prove que as retas BC, DE e T_aL_a são concorrentes.

4.11 Prove que T_aL_a e AX_a se cortam sobre o A-incírculo mixtilinear.

4.12 Prove que as retas AT_a, BT_b e CT_c (adivinha quem são T_b e T_c?) são concorrentes no centro de homotetia externa do incírculo e circuncírculo, e portanto estão sobre a reta OI.

4.13 Encontre o raio do A-incírculo mixtilinear em função do inraio r de ABC e seus ângulos.

4.14 Faça uma inversão no incírculo de ABC. Prove que o inverso de T_a é diametralmente oposto ao inverso de A.

4.15 Finalmente, prove os resultados análogos para o A-exincírculo mixtilinear.

4.2 Problemas

4.16 (European Girls 2013) Seja Ω o circuncírculo do triângulo ABC. O círculo ω é tangente aos lados AC e BC e internamente a Ω em P. Uma reta paralela a AB e que corta o interior do triângulo ABC é tangente a ω em Q. Prove que $\angle ACP = \angle QCB$.[4]

4.17 (China TST 2005) Seja ω o circuncírculo de ABC. O círculo γ é tangente às retas AB e AC nos pontos P e Q respectivamente e ao círculo ω no ponto S. As retas AS e PQ se cortam em T. Prove que $\angle BTP = \angle CTQ$.

4.18 Sejam O_b e O_c os centros dos exincírculos mixtilineares referentes a B e C, respectivamente. Esses círculos tangenciam o circuncírculo em R e S, respectivamente, e a reta BC em D e E, respectivamente; O_bS e O_cR se cortam em X e O_bE e O_cD se cortam em Y. Prove que $\angle BAX = \angle CAY$.

4.19 (Irã TST 2014) O incírculo de um triângulo escaleno ABC tem centro I e toca o lado BC em D. O ponto X pertence ao arco BC circuncírculo de ABC que não contém A e tem a seguinte propriedade: se E e F são as projeções ortogonais de X em BI e CI, e M é o ponto médio de EF, então $MB = MC$. Prove que $\angle BAD = \angle CAX$.

4.20 Seja ABC um triângulo com circuncentro O e incentro I. O círculo ω é tangente a AC em E, a AB em F e internamente a ω em D. Sejam M e N os circuncentros dos triângulos ADE e ADF, respectivamente. As mediatrizes de AC e AB cortam a reta BC em S e T, respectivamente. Sejam P e Q pontos sobre a mediatriz de AI tais que $SP \parallel AC$ e $TQ \parallel AB$. Prove que MP, NQ e AO têm um ponto em comum.

[4] Você viu esse problema antes?

4.21 (IMO Shortlist 1999) Seja ABC um triângulo dado. Seja X um ponto variável sobre o arco BC do circuncírculo Ω de ABC que não contém C, e sejam O_1 e O_2 os incentros do triângulos CAX e CBX. Prove que o circuncírculo de XO_1O_2 intersecta o círculo Ω em um ponto fixado.

4.22 (Taiwan TST 2014) Seja M um ponto qualquer sobre o circuncírculo de ABC. Suponha que as tangentes ao incírculo de ABC que passam por M cortem BC em X_1 e X_2. Prove que o circuncírculo de MX_1X_2 corta o circuncírculo de ABC novamente no ponto de tangência com o A-incírculo mixtilinear.

4.23 (EUA TST 2016) Seja ABC um triângulo escaleno com circuncírculo Ω e suponha que o incírculo de ABC tangencia BC em D. A bissetriz interna de $\angle A$ corta BC em E e Ω em F. O circuncírculo de DEF corta o A-exincírculo em S_1 e S_2, e Ω em $T \neq F$. Prove que a reta AT passa por S_1 ou S_2.

4.24 (IMO Shortlist 2014) Seja ABC um triângulo com circuncírculo Ω e incentro I. A reta que passa por I e é perpendicular a CI corta o segmento BC em U e o arco BC de Ω que não contém A em V. A reta que passa por U e é paralela a AI corta AV em X e a reta que passa por V e é paralela a AI corta AB em Y. Sejam W e Z os pontos médios de AX e BC, respectivamente. Prove que se I, X e Y são colineares então I, W e Z também são colineares.

4.25 Seja ABC um triângulo e D, E e F os pontos de tangência do incírculo de ABC com os lados BC, CA e AB, respectivamente. A reta EF corta o circuncírculo Γ de ABC em X e Y. Além disso, seja T o segundo ponto de interseção do circuncírculo de DXY com o incírculo. Prove que a reta AT passa pelo ponto de tangência entre Γ e o A-incírculo mixtilinear.

A "inversão" $\sqrt{bc}$ que quase não muda ABC – Dicas para os problemas

Carlos Shine

É claro que as dicas são sugestões que levam a alguma solução. Você pode (deve!) fazer a sua própria solução.

3 A "inversão" $\sqrt{bc}$

3.12 Sejam O o circuncentro e I o incentro do triângulo ABC. Um círculo tangencia o lado AB em K, o lado BC em L e o circuncírculo de AOC externamente. Prove que a reta KL passa pelo ponto médio de BI.

Dicas

Faça a "inversão" $\sqrt{ac}$; A e C trocam de lugar, O vai para o simétrico de B em relação a AC; sejam A' e C' os simétricos de B e com relação a A e C, respectivamente. O circuncírculo de AOC vai para o círculo dos nove pontos de $A'BC'$; aí o problema essencialmente segue do fato do círculo dos nove pontos ser tangente ao B-exincírculo e de uma conta com a inversão.

3.13 Seja O o circuncentro do triângulo acutângulo ABC. O circuncírculo de BOC e o círculo que passa por A e C e é tangente a AB se cortam em $T \neq A$. As retas TO e BC se cortam em K. Prove que AK é tangente ao circuncírculo de ABC.

Dicas

Mesma ideia do problema anterior. Defina B' e C' de modo análogo ao problema anterior; BOC é levado ao círculo dos nove pontos de $AB'C'$; encontre a imagem de T (pense na inversão!), encontre T (AT é uma reta especial!) e use projetiva para terminar.

3.14 (Rússia 2009) O triângulo ABC tem bissetriz interna D, com D sobre AC. A reta BD corta o circuncírculo Ω de ABC em $E \neq B$. O círculo ω com diâmetro DE corta Ω novamente em F. Prove que BF é simediana do triângulo ABC.

Dicas

f troca D e E, o círculo ω se mantém por simetria e F é levado ao ponto médio de AC.

3.15 Sejam ω o circuncírculo de ABC e r a reta tangente a ω que passa por A. Os círculos ω_1 e ω_2 tangenciam r, a reta BC e ω externamente. Sejam D e E os pontos de tangência de ω_1 e ω_2 em BC. Prove que os circuncírculos de ABC e ADE são tangentes.

Dicas

f troca ω_1 e ω_2 de lugar! Aí $f(D)$ pertence a AE, $f(E)$ pertence a AD e a reta que liga $f(D)$ e $f(E)$ é paralela a BC, acabando o problema.

3.16 Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O e altura BE. Seja ω o círculo de centro E e raio BE. O circuncírculo de AOC corta AB em $P \neq A$ e BC em $Q \neq C$. Prove que P, Q e E são colineares se, e somente se, o circuncírculo de AOC é tangente a ω.

Dicas

Mesma ideia do primeiro problema. Considere A' e C' como lá; o circuncírculo de AOC vai para o círculo dos nove pontos de $A'BC'$, O vai para o simétrico de B com relação a AC e E vai para o ponto B_0 diametrialmente oposto a B no circuncírculo de ABC; ω vira a perpendicular r a BO por O; P e Q viram pés de alturas de $A'BC'$. A reta PQ vira o círculo de diâmetro BH', sendo H' o ortocentro de $A'BC'$. Aí, sendo N' o centro do círculo dos nove pontos de $A'BC'$, queremos provar que $d(N', r) = R \iff \angle H'B_0B = 90^\circ$, o que é bem fácil.

3.17 (RMM 2011) O triângulo ABC está inscrito no círculo ω. Uma reta variável ℓ paralela a BC corta os segmentos AB e AC em D e E, respectivamente, e corta ω em K e L, sendo que D está entre K e E. O círculo γ_1 é tangente aos segmentos KD e BD e a ω; o círculo γ_2 é tangente aos segmentos LE e CE e a ω. Determine o lugar geométrico, ao variarmos ℓ, dos pontos de interseção da tangentes comuns internas de γ_1 e γ_2.

Dicas

A transformação leva a figura a outra homotética à original; como tem a reflexão, o lugar geométrico está contido no eixo de reflexão, que é a bissetriz de $\angle BAC$.

3.18 O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB em P, Q e R, respectivamente. Suponha que as retas PQ e AB se cortam em D e as retas QR e AC se cortam em E. Sendo I o incentro de ABC, prove que os circuncírculos de PQE, PRD e AIP têm dois pontos em comum.[1]

Dicas

Faça uma "inversão" $\sqrt{qr}$, por P! I vira o simétrico de P com relação a QR, A vai para um ponto na mediana por P (PA é simediana de PQR); esse ponto é o simétrico da interseção da mediana por P em PQR com relação ao ponto médio de QR (use potência de ponto para ver por quê). Os pontos D e E para as interseções do círculo tangente por P a QR em Q com PR e do círculo tandente por P a QR em R com PQ. Em seguida, tente provar que a reta por $f(I)$ e $f(A)$ é simediana de $f(I)QR$, e aí deve terminar.

3.19 Seja P um ponto sobre o circuncírculo de ABC. A reta PA corta BC em A_1, a reta PB corta AC em B_1 e PC corta AB em C_1. Uma inversão no circuncírculo leva A_1, B_1 e C_1 a A_2, B_2 e C_2, respectivamente. Prove que as retas AA_2, BB_2 e CC_2 concorrem em um ponto cujo conjugado isogonal pertence ao círculo dos nove pontos de ABC.

Dicas

Faça a "inversão" $\sqrt{bc}$ (pois é, perdemos simetria). O importante é que A_2 é levado ao simétrico de $Q = f(A_1)$ (que está no circuncírculo) com relação a BC. Temos que AQ é isogonal a AP, logo A_2 é levado a A_3, simétrico de P com relação ao ponto médio de BC (pois $d(A_3, BC) = d(Q, BC) = d(P, BC)$ e A_3 e P estão em semiplanos opostos com relação a BC – e AQ e AP são isogonais). Além disso, AA_2 e AA_3 são isogonais. Em termos de vetores, $A_3 = B + C - P$ e todo ponto de AA_3 é da forma $tA + (1-t)(B + C - P)$. Tomando $t = 1/2$, obtemos o ponto $U = (A+B+C-P)/2 = (3G-P)/2$, que não depende de A, B ou C, e portanto pertence a AA_3, BB_3 e CC_3; além disso, $2U + P = 3G \iff 2\overrightarrow{GU} = \overrightarrow{PG}$, o que mostra que U é obtido a partir de P através de uma homotetia inversa de razão $-1/2$ – a que leva o circuncírculo ao círculo dos nove pontos! Com isso, AA_3, BB_3 e CC_3 são concorrentes no círculo dos nove pontos e é só tomar conjugados isogonais para terminar.

3.20 No triângulo ABC, AD é uma altura e M é o ponto médio de AD. Sejam X e Y as projeções ortogonais de D sobre CM e BM, respectivamente. As retas BX e CY se cortam em Z. Prove que o circuncírculo XYZ e o círculo de diâmetro AD são tangentes.

[1] Esse problema também vale trocando "incírculo" por "A-exincírculo" e I por I_a.

Dicas

Faça uma "inversão" $\sqrt{xy}$ no triângulo DXY. M vai para o pé da altura por D, X e Y trocam de lugar, e X, Y, $f(C)$ e $f(B)$ formam um retângulo! Para provar isso, encontre $f(BC)$ e $f(MY)$, por exemplo. O círculo de diâmetro AD vira a mediatriz de D e $f(M)$. $f(Z)$ é mais chato de achar, mas vendo a figura só com f (nem sempre vale a pena manter tudo), temos o seguinte problema: seja $UWXY$ um retângulo e D um ponto sobre o lado UW; os circuncírculos de UDX e WDY se cortam em $K = f(Z)$; prove que o centro O do retângulo, K, Z e Y são concíclicos, o que resolve o problema (por quê?). Para resolver esse problema, veja que O está no eixo radical dos dois círculos, e faça um arrastão para ver que, sendo L a outra interseção dos dois círculos, LA bissecta $\angle XLY$. Isso acaba o problema.

4 f do incírculo e do A-exincírculo: círculos mixtilineares

4.16 (European Girls 2013) Seja Ω o circuncírculo do triângulo ABC. O círculo ω é tangente aos lados AC e BC e internamente a Ω em P. Uma reta paralela a AB e que corta o interior do triângulo ABC é tangente a ω em Q. Prove que $\angle ACP = \angle QCB$.[2]

Dicas

Você fez esse problema em um dos exercícios!

4.17 (China TST 2005) Seja ω o circuncírculo de ABC. O círculo γ é tangente às retas AB e AC nos pontos P e Q respectivamente e ao círculo ω no ponto S. As retas AS e PQ se cortam em T. Prove que $\angle BTP = \angle CTQ$.

Dicas

O ponto médio de PQ é o incentro I. Com um arrastãozinho, prove que SBP é semelhante a SIQ, e com a semelhança análoga, prove que $BP/QC = (SP/SQ)^2 = PT/TQ$ e termina com outra semelhança.

4.18 Sejam O_b e O_c os centros dos exincírculos mixtilineares referentes a B e C, respectivamente. Esses círculos tangenciam o circuncírculo em R e S, respectivamente, e a reta BC em D e E, respectivamente; O_bS e O_cR se cortam em X e O_bE e O_cD se cortam em Y. Prove que $\angle BAX = \angle CAY$.

Dicas

Primeiro vamos eliminar os centros O_b e O_c do problema. Considere as inversões σ_b, σ_c no B-exincírculo mixtilinear e no C-exincírculo mixtilinear, respectivamente. Sejam $D' = \sigma_c(D)$ e $E' = \sigma_b(E)$. Então, com um arrastão, $D'EDE'$ é inscritível, e uma potência de ponto mostra que Y está no eixo radical dos circuncírculos ω_d de ADD' e ω_e de AEE'. Seja T a outra interseção desses círculos, e podemos trocar Y, O_bE e O_cD por T, ω_d e ω_e. Para terminar, faça a "inversão" $\sqrt{bc}$. Os pontos R e S vão para E e D, respectivamente, e O_b e O_c vão para $\sigma_c(A)$ e $\sigma_b(A)$ (prove isso!); assim, RO_c vai para o círculo que passa por A, E e $\sigma_B(A)$, que também passa por E' (ou seja, ω_e). Logo X vai para T e o problema acaba.

4.19 (Irã TST 2014) O incírculo de um triângulo escaleno ABC tem centro I e toca o lado BC em D. O ponto X pertence ao arco BC circuncírculo de ABC que não contém A e tem a seguinte propriedade: se E e F são as projeções ortogonais de X em BI e CI, e M é o ponto médio de EF, então $MB = MC$. Prove que $\angle BAD = \angle CAX$.

[2]Você viu esse problema antes?

Dicas

O ponto X tem que ser o ponto de tangência do A-exincírculo mixtilinear no circuncírculo. Primeiro note que se $BM = MC$, então as projeções de E e F sobre BC são equidistantes do ponto médio de BC. Ou seja, BE/CF é constante; então se movermos E em direção a I, F também vai em direção a I e vice-versa, e X se move para o interior (ou interior do ângulo opv, se for no sentido oposto) do ângulo $\angle EXF$. Isso mostra que X é único. É só provar que o ponto de tangência tem essa propriedade: se I_a é o A-exincentro, mostre que $BE/CF = \operatorname{sen}\angle BI_aX/\operatorname{sen}\angle CI_aX = BI_a/CI_a = \cos\gamma/\cos\beta$ (simedianas estão envolvidas!). Daí é fácil terminar, pois isso prova que as projeções de BE e CF sobre BC têm a mesma medida.

4.20 Seja ABC um triângulo com circuncentro O e incentro I. O círculo ω é tangente a AC em E, a AB em F e internamente a ω em D. Sejam M e N os circuncentros dos triângulos ADE e ADF, respectivamente. As mediatrizes de AC e AB cortam a reta BC em S e T, respectivamente. Sejam P e Q pontos sobre a mediatriz de AI tais que $SP \parallel AC$ e $TQ \parallel AB$. Prove que MP, NQ e AO têm um ponto em comum.

Dicas

Primeiro lidamos com os pontos P e Q, que são bem estranhos. Considere os círculos ω_P e ω_Q de centros P e Q que passam por A (e I). Seja K a interseção de ω_P e o circuncírculo de ADE. Note que MP é a mediatriz de AK; defina L analogamente; a interseção de MP e NQ é então o circuncentro de AKL; basta provar que os circuncírculos de AKL e ABC são tangentes. Outro ponto em ω_P é o simétrico U de C com relação a S. Defina ω_Q e V analogamente.

Fazemos a "inversão" $\sqrt{bc}$. ω_P vai para a reta que passa por $f(I) = I_a$ e $f(U)$, interseção de AV com o circuncírculo, que é o ponto B_0 diametralmente oposto a B. ω vai para o A-exincírculo ω_A, D vai para o ponto de tangência K_a de ω_A em BC, E para o ponto de tangência K_c em AB, F para o ponto de tangência K_b em AC. Precisamos provar que $BC \parallel YZ$, em que Y é a interseção de I_aB_0 e K_aK_c e Z é a interseção de I_aC_0 e K_aK_b. Mas isso sai rapidinho com uma conta.

4.21 (IMO Shortlist 1999) Seja ABC um triângulo dado. Seja X um ponto variável sobre o arco BC do circuncírculo Ω de ABC que não contém C, e sejam O_1 e O_2 os incentros do triângulos CAX e CBX. Prove que o circuncírculo de XO_1O_2 intersecta o círculo Ω em um ponto fixado.

Dicas

Esse sai fazendo uma inversão simples em C e um pouquinho de conta, mas fazer a "inversão" $\sqrt{bc}$ e usar a estrela da morte evita as contas: seja M o ponto médio do arco AC que não contém A, e considere $f(M)$; defina N analogamente. Então é fácil de mostrar que o ponto de contato do C-exincírculo com AB é o ponto médio de $f(M)$ e $f(N)$. Sendo T o ponto de tangência entre Ω e o C-incírculo mixtilinear, desfazendo a inversão isso significa que $TM/TN = CM/CN = MO_1/NO_2$ e TO_1M e TO_2N são semelhantes, e T é o centro de roto-homotetia que leva O_1O_2 a MN, e X, interseção de MO_1 e NO_2, está no circuncírculo de TO_1O_2.[3]

4.22 (Taiwan TST 2014) Seja M um ponto qualquer sobre o circuncírculo de ABC. Suponha que as tangentes ao incírculo de ABC que passam por M cortem BC em X_1 e X_2. Prove que o circuncírculo de MX_1X_2 corta o circuncírculo de ABC novamente no ponto de tangência com o A-incírculo mixtilinear.

Dicas

Inverta pelo *incírculo* de ABC (para as tangentes serem menos feias). Considere os pontos de tangência D, E, F do incírculo sobre BC, CA, AB. A', B' e C' são os pontos médios de EF, DF, DE, e o circuncírculo vai para o círculo dos nove pontos ω_9 de DEF (ele vai ser o triângulo de referência agora). E o ponto T de tangência com o A-incírculo mixtilinear? Usamos o fato de que ele está sobre IM_a, em que M_a é o ponto médio do arco BAC para mostrar que ele é o

[3] Talvez nesse caso fazer a conta seja mais fácil.

ponto diametralmente oposto a A' em ω_9, também conhecido como ponto médio de DH, sendo H ortocentro. M' é um ponto qualquer de ω_9, e ponto médio do segmento que liga os pontos de tangência T_1 e T_2 das retas que passam por M ao incentro de ABC (agora circuncentro de DEF). X_1' e X_2' são os pontos médios de DT_1 e DT_2. Para terminar, a homotetia com centro D e razão 2 leva $X_1'X_2'T'M'$ para T_1T_2HD', em que D' é o simétrico de D com relação a M', e a simetria com relação a M' leva T_1T_2HD' para $T_2T_1H'D$, em que H' é a imagem de M' na homotetia que leva ω_9 ao circuncírculo.

4.23 (EUA TST 2016) Seja ABC um triângulo escaleno com circuncírculo Ω e suponha que o incírculo de ABC tangencia BC em D. A bissetriz interna de $\angle A$ corta BC em E e Ω em F. O circuncírculo de DEF corta o A-exincírculo em S_1 e S_2, e Ω em $T \neq F$. Prove que a reta AT passa por S_1 ou S_2.

Dicas

Um problema perfeito para uma "inversão" $\sqrt{bc}$! T é o ponto de contato de Ω com o A-incírculo mixtilinear, então T vai para o ponto de contato K do A-exincírculo com BC. E e F trocam de lugar; o circuncírculo de DEF vai para o circuncírculo de KEF. Para acabar, veja que $AT \cdot AK = AB \cdot AC = AE \cdot AF$. Então considere o simétrico K' de K com relação à bissetriz de $\angle A$. K' está no A-exincírculo pois ele é fixado pela reflexão, está sobre AT pois AT e AK são conjugados isogonais e está sobre o circuncírculo de DEF pois $AT \cdot AK' = AE \cdot AF$.

4.24 (IMO Shortlist 2014) Seja ABC um triângulo com circuncírculo Ω e incentro I. A reta que passa por I e é perpendicular a CI corta o segmento BC em U e o arco BC de Ω que não contém A em V. A reta que passa por U e é paralela a AI corta AV em X e a reta que passa por V e é paralela a AI corta AB em Y. Sejam W e Z os pontos médios de AX e BC, respectivamente. Prove que se I, X e Y são colineares então I, W e Z também são colineares.

Dicas

Comece com arrastão e semelhança para mostrar que $BYIV$ é cíclico e $IY \perp AI$, ou seja, Y é o ponto de contato de AB com o A-incírculo mixtilinear Ω_A. O circuncírculo de IYB então corta Ω no ponto de contato V de Ω e Ω_a. Agora, IZ é paralelo à reta que liga A ao ponto de contato E do A-exincírculo com BC. Um arrastãozinho (lembre, AIX é triângulo retângulo) e conjugado isogonal termina o problema.

4.25 Seja ABC um triângulo e D, E e F os pontos de tangência do incírculo de ABC com os lados BC, CA e AB, respectivamente. A reta EF corta o circuncírculo Γ de ABC em X e Y. Além disso, seja T o segundo ponto de interseção do circuncírculo de DXY com o incírculo. Prove que a reta AT passa pelo ponto de tangência entre Γ e o A-incírculo mixtilinear.

Dicas

Inverta pelo incírculo de novo. A' é o ponto médio de EF. Sabemos que a reta que liga A ao ponto de contato do A-exincírculo com BC passa pelo oposto D_0 de D no incírculo. Vamos provar que $\angle IAT = \angle D_0AI \iff \angle ITA' = \angle ID_0A'$. Na verdade, provaremos que A', D_0 e T são colineares, e o problema sai. Para fazer isso, usamos potência de ponto e centro radical: seja P a interseção de TD, eixo radical do incírculo com o circuncírculo de DXY, e XY, eixo radical de Γ com o circuncírculo de DXY. Assim, P está no eixo radical de Γ com o incírculo, e basta provar que a potência de P com relação ao círculo dos nove pontos de DEF é também $PL \cdot PA'$, sendo L o pé da altura por D em DEF, pois aí $LA'DT$ é cíclico e $\angle A'TD = 90° = \angle D_0TD$ e D_0, A' e T são colineares. Em outras palavras, temos que provar que o incírculo de ABC, o círculo dos nove pontos de DEF, e o circuncírculo de ABC são coaxiais. Mas isso vem do fato de os dois últimos serem inversos com relação ao primeiro prova exatamente isso.