

Alguns problemas de combinatória e teoria dos números

Prof. Cícero Thiago B. Magalhães

ciceroth@yahoo.com.br

O objetivo desta aula é usar algumas técnicas de contagem e de teoria dos números para resolver alguns problemas olímpicos.

Problema 1

Três números de três algarismos são dados tais que eles possuem em sua representação decimal todos os algarismos de 1 à 9, exceto o zero. A soma dos três números é 1665. O primeiro algarismo de cada número é permutado com o último algarismo do mesmo número, formando três novos números de três algarismos. Qual a soma dos três novos números?(OMR/2004)

Problema 2

Um palhaço equilibrista comprou 10 conjuntos de pratos, cada um deles contendo 10 pratos. O peso de cada prato, a princípio é de 200g. Todos os pratos devem pesar igualmente, pois caso contrário, o palhaço não poderia fazer seu número de equilibrismo. Alguém informa ao palhaço que um dos conjuntos de 10 pratos foi vendido errado, pois os pratos deste conjunto pesam 150g. O palhaço pode utilizar uma balança que fornece o peso exato, mas essa balança só funciona com ficha e ele tem dinheiro apenas para uma pesagem. Como ele descobre o conjunto mais leve?(OCM/1997)

Problema 3

Algumas pessoas vão a uma pizzaria. Cada pessoa que está faminta quer comer 6 ou 7 pedaços de pizza, e as outras querem comer 2 ou 3 pedaços. Cada pizza possui 12 pedaços. Sabe-se que 4 pizzas não são suficientes para satisfazer a todos, mas com 5 pizzas sobrariam alguns pedaços. Quantas pessoas foram à pizzaria? Quantas delas estavam famintas?

Problema 4

João e Maria decidiram partilhar um tablete de chocolate que estava dividido em quadradinhos. João é muito guloso e, na ausência de Maria, comeu todos os quadradinhos da borda do tablete, na esperança de que Maria não notasse a diferença. Maria não se deixou enganar e comeu os quadradinhos restantes. Sabendo que ambos comeram o mesmo número de quadradinhos, quantos quadradinhos podem ter os lados deste tipo de tablete?

Problema 5

Os alunos da turma de Pedro praticam a soma e a multiplicação de números

inteiros. A professora escreve os números de 1 a 9 em nove fichas, uma para cada número, e as coloca em uma urna. Pedro retira três fichas e deve calcular a soma e o produto dos três números correspondentes. Ana e Julián fazem o mesmo, esvaziando a urna. Pedro informa à professora que retirou três números consecutivos cujo produto é 5 vezes a soma. Ana informa que não tem nenhum número primo, mas sim dois consecutivos e que o produto desses três números é 4 vezes a soma dos mesmos. Quais números retirou Julián?

Problema 6

Estando algumas pilhas de discos em uma mesa, um movimento admissível é escolher uma pilha, descartar um de seus discos e dividir o que resta da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais. Inicialmente existe sobre a mesa somente uma pilha e esta tem 1000 discos. Determine se é possível, depois de alguma sucessão de movimentos admissíveis, chegar a uma situação onde cada pilha tenha exatamente 3 discos.

Problema 7

Em um tabuleiro quadriculado 100×100 algumas casas são pretas e outras são brancas. Sabe-se que as quatro casas do canto são pretas e que nenhuma outra casa do bordo do tabuleiro é preta. Dizemos que duas casas de um tabuleiro são vizinhas se possuem pelo menos um vértice em comum. Em cada casa do tabuleiro escrevemos um número, que é o número de casas pretas vizinhas. É possível que a soma de todas as casas do tabuleiro seja igual a 2000?

Problema 8

Em um torneio de xadrez com 8 participantes, todos jogam contra todos (uma só vez). A vitória vale um ponto, o empate meio ponto e a derrota zero ponto. No final do torneio, todos os competidores obtiveram pontuações distintas e o 2º colocado somou tantos pontos quanto os 4 últimos juntos. Qual foi o resultado da partida entre o terceiro e o quinto colocado?

Problema 9

Considere o conjunto $\{4, 8, 9, 16, 27, 32, 64, 81, 243\}$. Determine o número total de valores distintos que se pode obter multiplicando - se dois elementos distintos deste conjunto.