# CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E DEMONSTRAÇÕES
## nível 2

Prof. Élio Mega

A partir do século V aC, os matemáticos gregos desenvolveram uma parte da Matemática, intimamente ligada à Geometria, conhecida como Construções Geométricas com Régua e Compasso. Os problemas de construções geométricas são muito interessantes e alguns deles devem ser enfrentados por quem está interessado em Geometria. É bom saber que os gregos antigos propuseram e resolveram muitos problemas de construção difíceis, mas não conseguiram resolver, ou melhor, não conseguiram provar que não tinham solução os três problemas conhecidos, respectivamente, como

(1) a trisecção de um ângulo
(2) a duplicação de um cubo
(3) a quadratura de um círculo

consistindo em, usando apenas régua e compasso,

(1) dividir um ângulo dado qualquer em três partes iguais (ou seja, em três ângulos congruentes cuja soma é o ângulo dado)
(2) construir o lado de um cubo, cujo volume é o dobro do volume de um cubo cujo lado é dado
(3) construir um quadrado cuja área é a mesma de um círculo dado

Esses problemas foram enfrentados com sucesso apenas no século XIX, com a ajuda da Álgebra. Mas isto já é outra história. Com certeza você ainda irá ouvir bastante sobre esse assunto, em outras oportunidades.

Para resolver problemas de construções geométricas, além de lápis e papel, utilizam-se dois instrumentos para desenhar figuras: um compasso e uma régua (sem escala). O compasso será utilizado para desenhar circunferências e a régua, para traçar retas. Serão utilizadas apenas as seguintes operações (que se justificam pelos axiomas da Geometria Euclidiana):

O1. Traçar uma reta[1] por dois pontos conhecidos.
O2. Desenhar uma circunferência, dados o seu centro e o seu raio.
O3. Marcar os pontos, quando houver, de intersecção de duas linhas (duas retas, duas circunferências ou uma reta e uma circunferência).

Para simplificar as construções, é comum desenharmos arcos de circunferência em vez de circunferências, além de segmentos de retas e semi-retas em vez de retas. Entretanto, há situações em que essa prática pode ocultar soluções válidas de um problema, sendo necessária a devida atenção para evitar isso.

Uma construção geométrica consiste numa seqüência finita de pelo menos uma dessas operações. Iremos desenvolver um procedimento adequado para descrever os passos de uma construção (como um programa de computação). Mas o mais importante são os conceitos, idéias e teoremas geométricos envolvidos na resolução dos problemas. Por isso, iremos exercitar a atividade fundamental característica da Matemática: a demonstração. O fato de exibirmos uma figura desenhada não basta para afirmar que um problema foi resolvido: é preciso provar, com bases nas leis da lógica e nos fatos já conhecidos (definições, axiomas ou teoremas), que tudo o que foi feito é válido. Por isso, cada passo da construção deve ser justificado (isto é, demonstrado). Vamos ver um exemplo.

[1] Na verdade, não podemos desenhar uma reta numa folha de papel. Nossas construções deverão deixar claro se o que desenhamos é reta, semi-reta (tem uma origem) ou segmento de reta (um segmento está limitado por dois pontos).

Construir um triângulo, dados dois de seus lados e o ângulo formado por eles.

Nesta primeira descrição da construção, iremos explicar detalhes que serão omitidos nas próximas.

Procedimento:

1) *Transporte* o segmento maior para um lugar conveniente:
- marque um ponto num lugar conveniente da página (ponto A)
- coloque a ponta seca do compasso numa extremidade do segmento dado maior e a ponta com grafite na outra extremidade do mesmo
- sem mexer na abertura do compasso, coloque a ponta seca no ponto A e trace um pequeno arco (para a direita, por exemplo)
- marque um ponto desse arco (ponto B)
- com a régua, desenhe o segmento AB

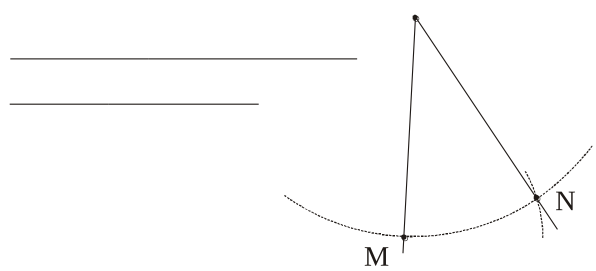
2) *Transporte* o ângulo dado, de forma que seu vértice coincida com A e um de seus lados com o segmento AB.
- com ponta seca no vértice do ângulo dado, trace uma circunferência (arco) de raio menor do que AB; esta encontra os lados do ângulo em M e N.
- com mesmo raio, trace a circunferência (arco) com centro em A, encontrando o segmento AB em M’.
- com centro em M’, trace a circunferência (arco) de raio MN; ela encontra a circunferência (arco) de centro A em N’.
- trace a reta (semi-reta de origem A), passando por N’.

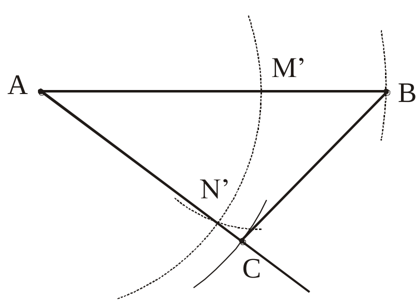
3) Com centro em A, trace a circunferência (arco) de raio igual ao outro lado dado; esta circunferência (arco) encontra a semi-reta AN’ em C.

4) Trace o segmento AC.

5) Trace o segmento BC.

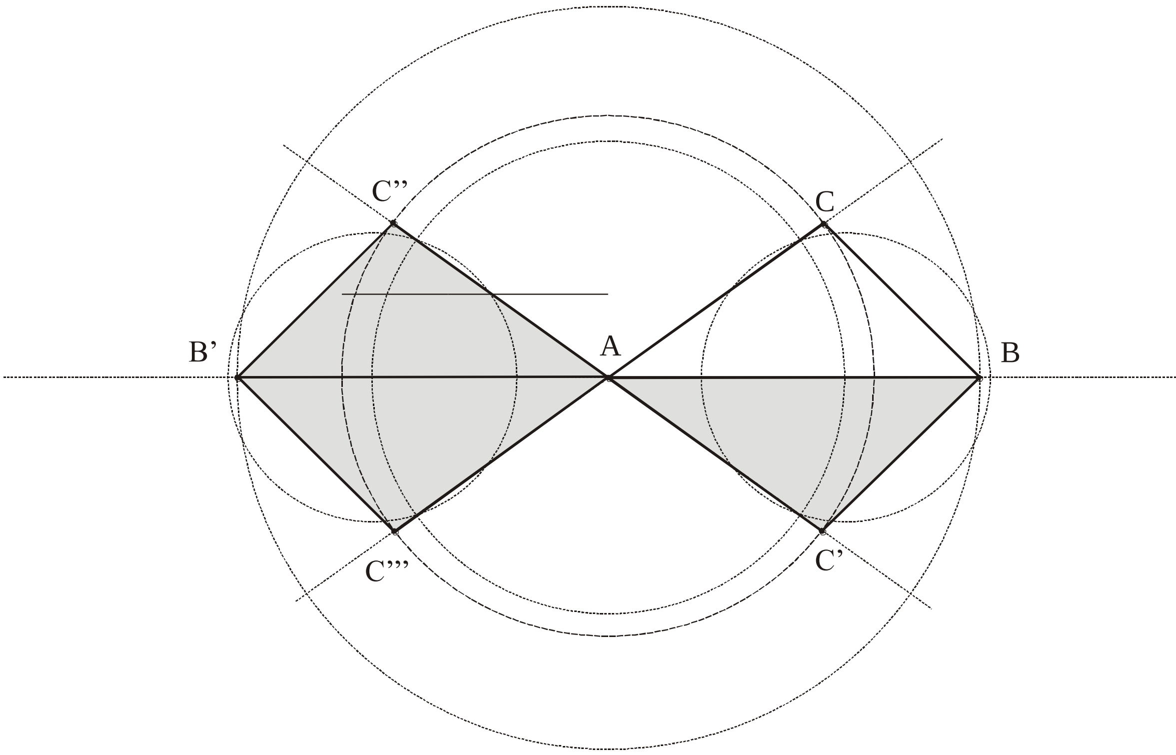
A construção obtida é



Podemos justificar as construções acima, de forma abreviada. Além dos axiomas da Geometria Euclidiana que fundamentam as operações O1, O2 e O3, foi utilizado o caso LLL de congruência de triângulos no passo 2 (transporte de ângulo).

Se desenharmos retas e circunferências completas nas operações de transporte, as construções ficarão mais complexas e provavelmente surgirão soluções redundantes, isto é, congruentes. No caso acima, nessas condições, a construção final ficaria assim:

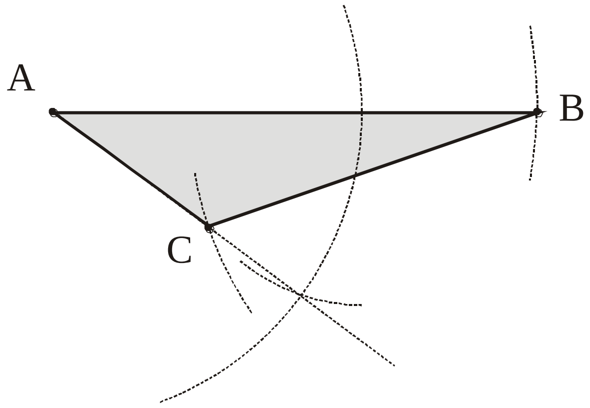



Os triângulos ABC', AB'C'' e AB'C''' são congruentes ao triângulo ABC. Esta construção ilustra o fato de que a correspondência LAL entre triângulos é uma congruência.

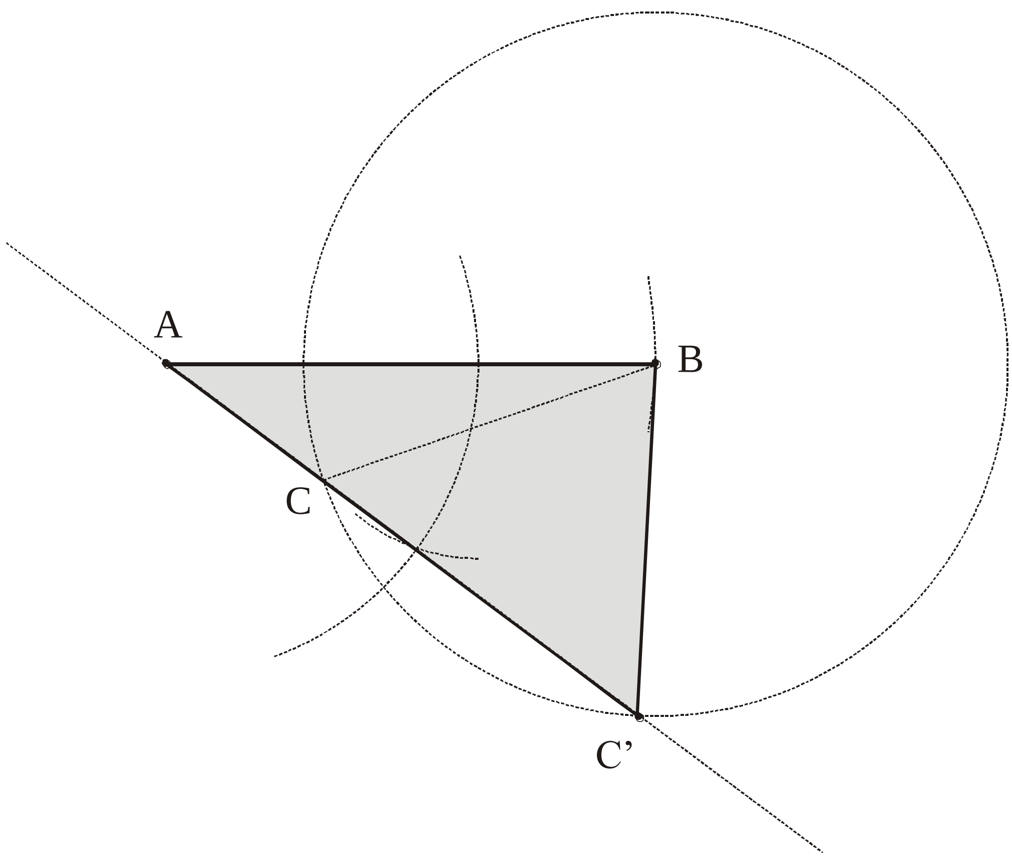
Porém, nem sempre as soluções são congruentes. Considere o problema a seguir.

Construir um triângulo, dados dois de seus lados e o ângulo oposto ao ângulo formado por eles.

O desenho a seguir mostra uma construção onde as representações de retas e os traçados de arcos foram insuficientes para mostrar todas as soluções válidas:




Uma construção cuidadosa revela que há outra solução: um outro triângulo *ABC’*, não congruente ao triângulo *ABC* acima. Isto prova que a correspondência ALL entre dois triângulos quaisquer não é uma congruência. O leitor pode verificar que as outras soluções, caso fossem feitas retas e circunferências completas nas operações de transporte, seriam congruentes a essas duas.

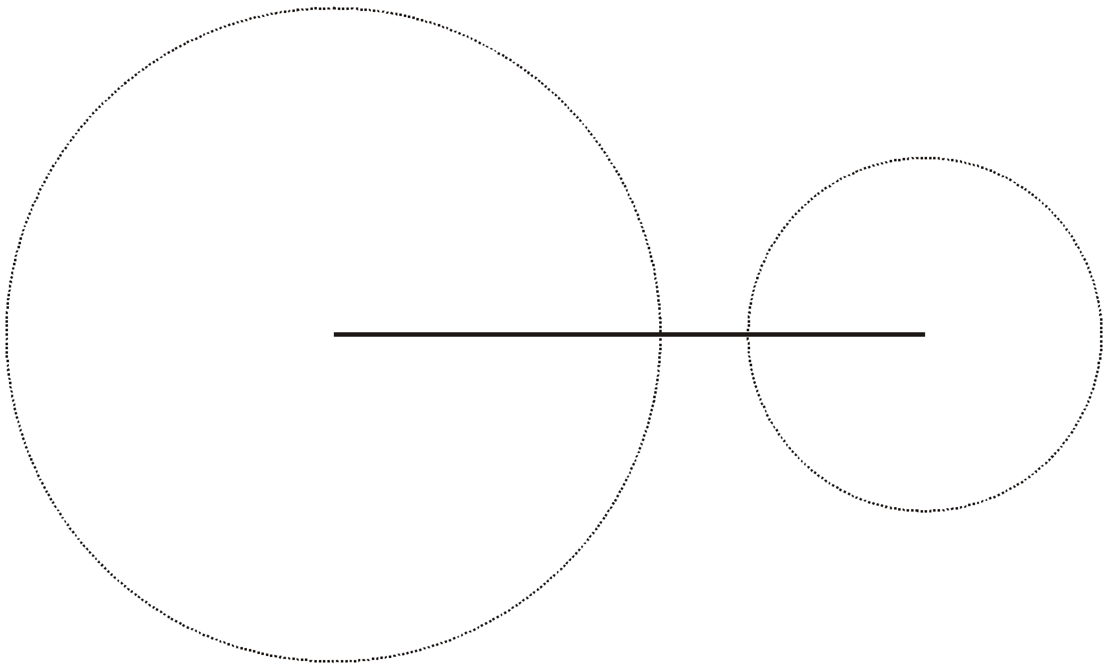



É importante considerar também as situações em que um problema de construção é enunciado, sem que sejam realmente apresentados os elementos dados. Neste caso, cabe ao leitor fazer considerações sobre as restrições do problema. Por exemplo:

## Construir um triângulo conhecendo-se seus três lados.

Se os supostos três lados forem os segmentos abaixo

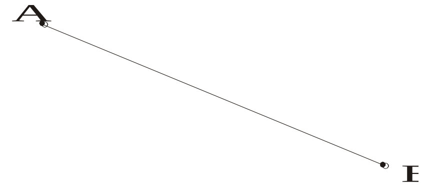
vemos, pela construção a seguir (onde as circunferências têm raios iguais, respectivamente, aos segmentos menores), que não pode existir tal triângulo:



Isto ocorre porque um lado de qualquer triângulo tem que ser menor que a soma dos dois outros lados. Algebricamente, a condição para que três números reais positivos quaisquer *a*, *b* e *c* sejam as medidas dos lados de um triângulo é $|a-b| < c < a+b$.

---

1. Em que situações dois triângulos são congruentes?
2. A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao mesmo que passa pelo seu ponto médio. Usando régua e compasso, desenhe a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, desenhado abaixo. Com base na congruência de triângulos, explique sua construção.

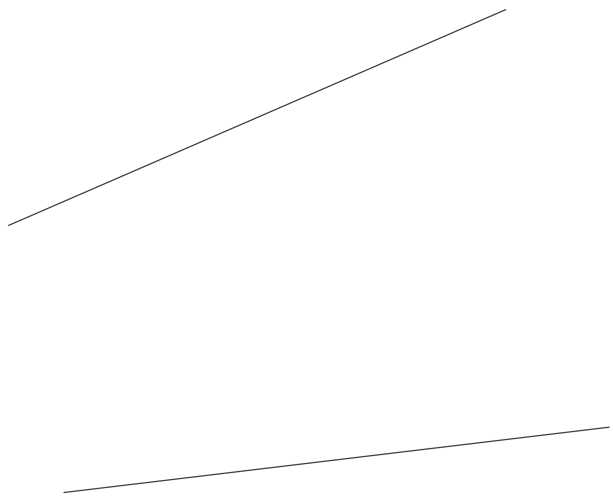



3. A mediatriz pode ser descrita como um conjunto de pontos que apresentam alguma propriedade interessante relacionada com a distância. Que propriedade é essa? Justifique sua afirmação.
4. A seguir, são dados dois segmentos, de medidas *a* e *b*.

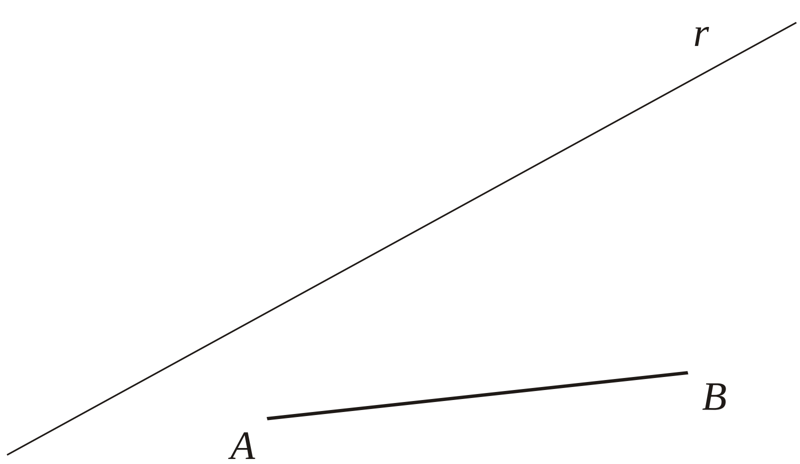
a) desenhe um segmento de medida *c*, tal que *a*, *b* e *c* sejam medidas dos lados de um triângulo isósceles.

b) desenhe um triângulo cujos lados medem *a*, *b* e $\frac{a+b}{2}$.

5. Conceitue bissetriz de um ângulo e mostre como construir a bissetriz de um ângulo dado.
6. Desenhar a bissetriz do ângulo abaixo, sem usar seu vértice, já que o mesmo é inacessível (está fora da folha de papel)

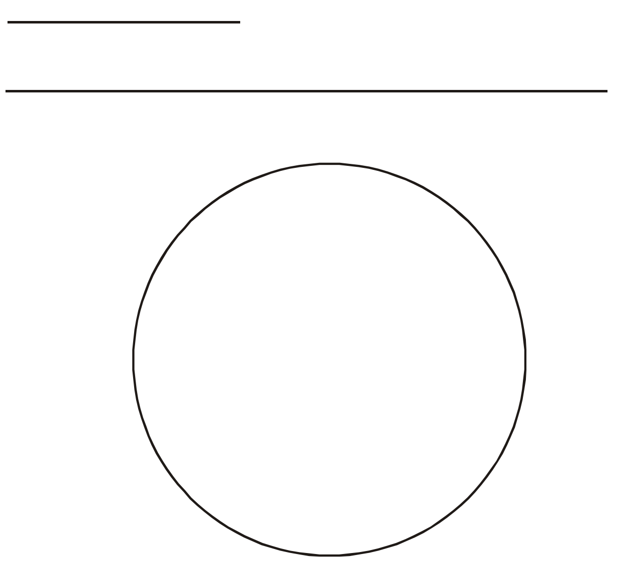


7. São dados, abaixo, a reta *r* e o segmento $\overline{AB}$. Localizar na reta r todos os pontos X tais que a medida do ângulo $A\hat{X}B$ seja de $60^o$.



8. Os quatro pontos dados a seguir pertencem a lados distintos de um quadrado. Desenhe esse quadrado.

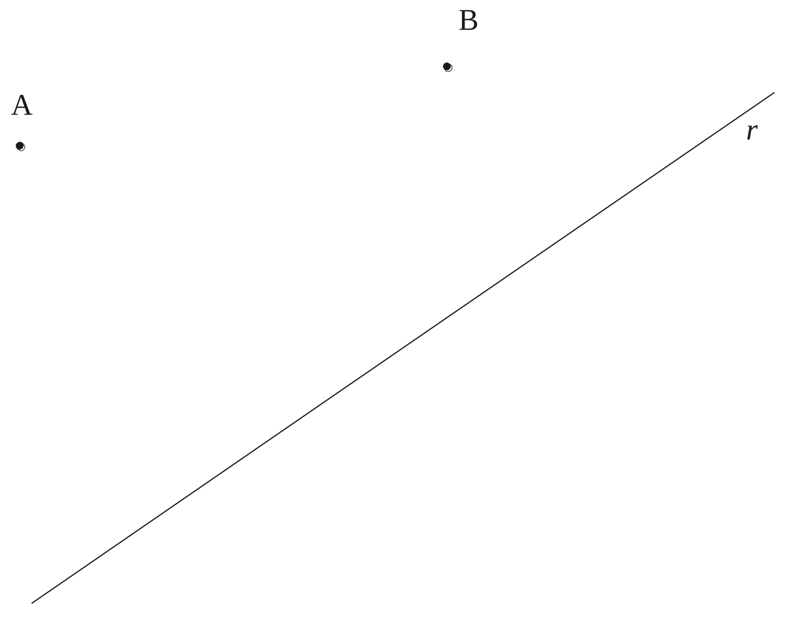
9. (OIAM) Um trapézio ABCD está inscrito na circunferência dada abaixo. Construir esse trapézio, sabendo que os segmentos dados a seguir representam, respectivamente, a altura e a soma das bases desse trapézio.



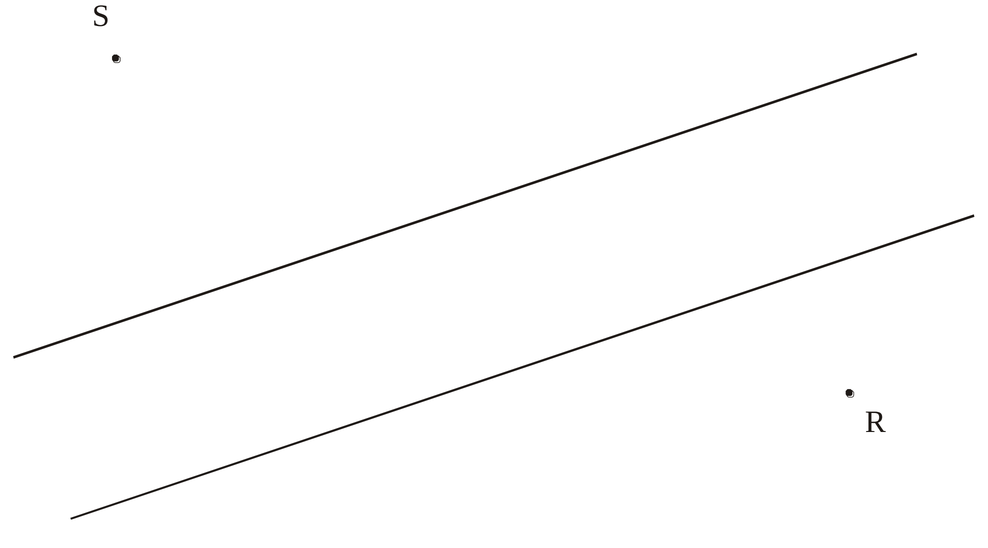
10. (OCS) Sejam *A*, *B* e *C* três pontos não alinhados e *E* (diferente de *B*) um ponto qualquer não pertencente à reta *AC*. Construa os paralelogramos *ABCD* (nesta ordem) e *AECF* (também nesta ordem). Demonstre que *BE* // *DF*.

As construções com régua e compasso constituem uma ferramenta valiosa na obtenção das imagens nas transformações geométricas, como a translação, a reflexão, a rotação e a homotetia. Não iremos estudar este assunto, mas a título de curiosidade iremos apresentar três problemas relacionados ao mesmo.

11. Um carro de bombeiros está no ponto *A* e parte para apagar um incêndio no ponto *B*; como está vazio, deve abastecer-se de água no rio representado pela reta *r*. Desenhe o caminho mais curto que o veículo deve percorrer.




12. Duas cidades *S* e *R* estão separadas por um rio de margens retas paralelas, sobre o qual se quer construir uma ponte perpendicular às margens e uma estrada formada por trechos retos ligando essas cidades e a ponte. Construa esse percurso de forma que seja o mais curto possível.



13. Um professor de Matemática dá aula nos colégios A, B e C. Ele quer alugar uma casa que se encontra num ponto P tal que a soma das distâncias de sua casa aos três colégios é a menor possível.