Construções Auxiliares

Bruno Holanda*

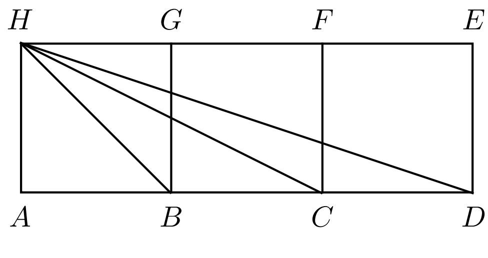
18 de novembro de 2011

Resumo

Em muitos problemas de Geometria, a capacidade de criar pontos, retas, círculos é mais importante do que o conhecimento de vários teoremas e proposições. Nesta aula vamos resolver alguns exercícios que são, na minha opnião, alguns do problemas mais interessantes e divertidos de geometria. E o mais legal: não será necessário um grande conhecimento teórico na área, mas muita criatividade será fundamental.

1 Problemas Propostos

1. Na figura abaixo $ABGH$, $BCFG$ e $CDEF$ são quadrados iguais. Determine a soma $\angle ABH + \angle ACH + \angle ADH$.



2. Seja $ABCD$ um quadrado e E um ponto no seu interior de modo que $\angle EDC = \angle ECD = 15°$. Mostre que o triângulo ABE é equilátero.

3. No quadrilátero conexo $ABCD$ temos que $\angle CAB = 40°$, $\angle CAD = 30°$, $\angle DBA = 75°$ e $\angle DBC = 25°$. Achar $\angle BDC$.
DICA: Seja $P \in AD$ tal que $\angle ABP = 40°$

4. Seja ABC um triângulo isósceles em A e P um ponto sobre AB tal que $AP = BC$. Determine o ângulo $\angle ACP$, sabendo que $\hat{A} = 20°$.

5. (Austrália 1982) Seja ABCum triângulo e P um ponto no seu interior. Os ângulos $\angle PAC$ e $\angle PBC$ são iguais. Sejam L e M as projeções de P aos lados BC e AC, respectivamente. Se D é o ponto médio de AB prove que $DL = DM$.

*Outros materiais como este podem ser encontrados em http://brunolholanda.wordpress.com/

6. No triângulo isósceles ABC com $CA = CB$ e $\angle ACB = 20^\circ$, sejam D e E pontos sobre os lados AC e BC respectivamente, tais que $\angle ABD = 60^\circ$ e $\angle BAE = 50^\circ$. Ache a medida do ângulo $\angle EDB$.

7. (Tailândia 2003) Dado um triângulo ABC com $\hat{A} = 70^\circ$. Seja I o incentro de ABC. Se $CA + AI = BC$, ache o ângulo $\hat{B}$.

8. (OBM 2007) Em um triângulo retângulo e isósceles são escolhidos dois pontos K e P sobre a hipotenusa AB tais que $\angle KCP = 45^\circ$, com K entre A e P. Prove que

$$AK^2 + BP^2 = KP^2.$$

9. (Bielarus 1996) Seja $ABCDE$ um pentágono com $AE = ED$, $AB + CD = BC$ e $\angle BAE + \angle CDE = 180^\circ$. Prove que $\angle AED = 2\angle BEC$.

10. (Rússia 1997) Um hexágono convexo $AC_1BA_1CB_1$ satisfaz: $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$ e $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1$. Prove que a área do triângulo ABC é metade da área do hexágono.

11. (Rússia 1997) Em um losando $ABCD$ a medida do $\angle B = 40^\circ$, E é o ponto médio de BC, F é o pé da perpendicular de A sobre a reta DE. Ache a medida do ângulo $\angle DFC$.

12. (OBM 1998) No triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E é um ponto sobre o lado BC tal que $BE = 2EC$. Dado que os ângulos $\angle ADC = \angle BAE$ são iguais, encontre o ângulo $\angle BAC$.

13. (OBM 2011) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AD = DC$, $AC = AB$ e $\angle ADC = \angle CAB$. Se M e N são os pontos médios dos lados AD e AB, prove que o triângulo MNC é isósceles.