O Teorema dos Números Primos
Nível U
(este programa é um oferecimento de ET)

1 Do que se trata?

Seja p_n o n-ésimo número primo:

$$p_1 = 2 \text{ (ao contrário da crença popular, 1 não é primo!)}, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \ldots$$

Uma questão que sempre preocupou os tios e tias na escola é a questão do crescimento dos primos. Em resposta à esta importante questão sócio-familiar, dois matemáticos, Hadamard e de la Vallée Poussin, independentemente provaram o famoso

Teorema 1.1 (Teorema dos Números Primos)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1$$

Em outras palavras, para $n \gg 0$ (i.e., n muito grande, tipo $n = 2$), temos que p_n é aproximadamente $n \log n$. Aqui, log denota o logaritmo em sua base predileta que, eu sei, é $e = 2,718281\ldots$.

A estreia do Teorema dos Números Primos em 1896 foi um sucesso instantâneo. Desde então, este teorema tem figurado no topo das paradas de sucesso, com diversas versões relançadas ao longo do tempo. Uma das mais populares utiliza a função

$$\pi(x) = \text{quantidade de números primos } \leq x$$

Teorema 1.2 (Teorema dos Números Primos, bis)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$$

Existe ainda uma terceira versão muito popular do Teorema dos Números Primos, que utiliza a chamada **função de von Mangoldt**:

$$\Lambda(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \log p & \text{se } n = p^r \text{ é potência do primo } p \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma maneira de interpretar a função $\pi(x)$ é como uma soma

$$\pi(x) = \sum_{n\leq x} a_n$$

onde atribuímos "peso" $a_n = 1$ se n é primo e "peso" $a_n = 0$ caso contrário. Com uma atribuição de pesos um pouco diferente, a la "von Mangoldt",

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\leq x} \Lambda(n),$$

o Teorema dos Números Primos adquire uma forma particularmente simples:

Teorema 1.3 (Teorema dos Números Primos, tris)

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1}$$

É esta a forma do teorema que iremos provar. As equivalências entre as três formas será mostrada mais tarde. Por enquanto, acredite em mim, pois é verdarde!

2 Prova miojo (fica pronto em 3 minutos!)

Agora vou mostrar uma prova "cozinhada" do Teorema dos Números Primos. Inicialmente, precisamos de alguma forma conectar a Análise com primos. Mas isto é fácil: qualquer matemático da esquina sabe fazer isto, especialmente se este matemático se chama Euler. "Considere a seguinte série

$$\zeta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

que converge absolutamente para $\Re s > 1$," diria Euler (se ele soubesse falar Português). Só relembrando: se $s = \sigma + it$, com $\sigma, t \in \mathbb{R}$, definimos

$$n^s \stackrel{\text{def}}{=} n^\sigma \cdot (e^{\log n})^{it} = n^\sigma \cdot \big(\cos(t \log n) + i \sin(t \log n)\big)$$

de modo que $|n^s| = n^\sigma$. Diria ainda Euler, "note que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right) \underset{\text{da PG}}{\stackrel{\text{soma}}{=}} \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

pois expandindo o produto do termo central, pela fatoração única em primos, obtemos obtemos cada parcela $1/n^s$ da série definindo $\zeta(s)$ exatamente uma única vez." Assim, temos

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad \text{para } \Re s > 1}$$

A função $\zeta(s)$ pode ser estendida a uma função meromorfa em todo o semi-plano $\Re s > 0$, com um único polo simples em $s = 1$ e resíduo 1. A ideia básica é aproximá-la por uma integral que converge nesta região. Temos

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s}\right) \iff \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n\geq 1} \phi_n(s)$$

onde cada função

$$\phi_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx$$

é analítica, e $|\phi_n(s)| \leq \sup_{x\in[n,n+1]} \left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right| \leq |s|/n^{\Re s+1}$ e portanto a soma dos $\phi_n(s)$ converge para uma função analítica em $\Re s > 0$. Note ainda que no semi-plano $\Re s > 1$ a função zeta não possui zeros pois se $s = \sigma + it$, com $\sigma, t \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 1$,

$$|\zeta(s)| = \prod_{p \text{ primo}} \left|1 - \frac{1}{p^s}\right|^{-1} \geq \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1} \geq \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} + \frac{1}{p^{2\sigma}} + \frac{1}{p^{3\sigma}} + \cdots\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta(\sigma)} > 0$$

Mas qual a relação entre a função zeta e o Teorema dos Números Primos? Para ver isto, na fatoração de Euler basta tomar o logaritmo ou, mais precisamente, a derivada logarítmica de zeta:

$$-\frac{d}{ds} \log \zeta(s) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

Para $\Re s > 1$ temos

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \Rightarrow -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \text{ primo}} \frac{d}{ds} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p \text{ primo}} \frac{\log p}{p^s \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$$

$$\iff -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \text{ primo}} \log p \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right)$$

e assim

$$\boxed{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}}$$

Em outras palavras, o Teorema dos Números Primos consiste em estimar a soma dos coeficientes da série de Dirichlet de $-\zeta'(s)/\zeta(s)$. Isto é feito em dois atos: o primeiro consiste em expressar a soma destes coeficientes em sua versão integral, utilizando o

Lema 2.1 (Truncamento) *Sejam $b > 1$ e $y > 0$ números reais. Temos*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{y^s}{s}ds \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 1 & se\ y > 1 \\ 0 & se\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

Mais precisamente, temos

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 1 + O\Big(\frac{y^b}{T|\log y|}\Big) & se\ y > 1 \\ O\Big(\frac{y^b}{T|\log y|}\Big) & se\ 0 < y < 1 \end{cases}}$$

Assim, é de se esperar que, para $b > 1$ e $x > 0$ não inteiro,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\cdot\frac{x^s}{s}ds \\ &= \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{(x/n)^s}{s}ds \qquad \text{(manobra suspeita mas otimista)} \\ &= \sum_{n\leq x}\Lambda(n) = \psi(x) \qquad \text{(truncamento)} \end{aligned}$$

Embora a manobra suspeita não se justifique, a versão mais precisa "com erro" do truncamento ainda permite escrever $\psi(x)$ utilizando a integral de $\zeta'(s)/\zeta(s)$. O segundo ato contém a passagem mais delicada de todo o argumento, pois utiliza a continuação analítica de $\zeta(s)$ na região $0 < \Re s \leq 1$ e a seguinte versão fraca da hipótese de Riemann. A hipótese de Riemann originalmente afirma que, nesta região, $\zeta(s) = 0 \Rightarrow \Im s = 1/2$; mas isto deixo como exercício para o leitor!

Teorema 2.2 (Poor man's Riemann Hypothesis) *Existe uma constante $c > 0$ tal que*

1.

$$\Re s \geq 1 - \frac{c}{\log(|\Im s| + 2)} \Rightarrow \zeta(s) \neq 0$$

2.

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = O(\log^2 T)$$

para

$$\Re s \geq 1 - \frac{c}{2\log(T+2)}, \qquad 2 \leq |\Im s| \leq T$$

Utilizando as estimativas acima, uma integração de contorno padrão (que invade a região $0 < \Re s \leq 1$) completa a demonstração do teorema:

Teorema 2.3 (Flipping) *Seja $x = N + 0.5 \geq 100$ para algum $N \in \mathbb{N}$ e seja c como no teorema anterior. Sejam ainda*

$$T \gg 0, \qquad a = 1 - \frac{c}{2\log(T+2)}, \qquad 1 < b < 2$$

Então

1.

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds + O\Big(\frac{x^b}{T(b-1)}\Big) + O\left(\frac{2^b\log(2x)}{T}\cdot x\log x\right)}$$

2.

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds = x + O(x^a\log^3 T) + O\left(\frac{x^b}{\log x}\cdot\frac{\log^2 T}{T}\right)}$$

Assim, existe uma constante $c > 0$ *tal que*

$$\psi(x) = x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$$

e portanto $\lim_{x\to\infty} \psi(x)/x = 1$.

Bem, vejamos agora os detalhes!

3 Provas honestas

3.1 Equivalências entre as diversas formas do Teorema dos Números Primos

A título de exemplo, vamos mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \iff \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$$

deixando a outra equivalência como exercício para o leitor.

Temos

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \sum_{p\le x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p \le \log x \sum_{p\le x} 1 = \pi(x)\cdot \log x$$

de modo que

$$\frac{\psi(x)}{x} \le \frac{\pi(x)}{x/\log x}$$

Por outro lado, se $1 < y < x$,

$$\pi(x) = \pi(y) + \sum_{y<p\le x} 1 \le \pi(y) + \sum_{y<p\le x} \frac{\log p}{\log y} \le y + \frac{\psi(x)}{\log y}$$

Tomando $y = \frac{x}{\log^2 x}$, temos

$$\pi(x) \le \frac{x}{\log^2 x} + \frac{\psi(x)}{\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)} \iff \frac{\pi(x)}{x/\log x} \le \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)}{x} \frac{\log x}{\log x - 2\log\log x}$$

Basta agora tomar o limite quando $x \to \infty$.

3.2 Truncamento

Suponha inicialmente que $y > 1$. Basta fazer uma integração em torno de um retângulo de vértices $a \pm iT$ e $b \pm iT$ com $a < 0$. Como y^s/s possui um único polo em $s = 0$ e resíduo 1 no interior deste retângulo, temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{b+iT}^{a+iT} \frac{y^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{a-iT} \frac{y^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{b-iT} \frac{y^s}{s} ds = 1$$

e estimativas

$$\left|\int_{b-iT}^{a-iT} \frac{y^s}{s} ds\right| = \left|\int_{b+iT}^{a+iT} \frac{y^s}{s} ds\right| \le \left|\int_b^a \frac{y^\sigma}{T} d\sigma\right| \le \frac{y^b}{T\log y}$$

e

$$\left|\int_{a+iT}^{a-iT} \frac{y^s}{s} ds\right| \le 2T \cdot \frac{y^a}{|a|} \to 0 \text{ quando } a \to -\infty$$

donde o resultado segue.

A prova no caso em que $0 < y < 1$ é análoga, agora com $a > b$; observe que neste caso y^s/s é analítica no interior do retângulo.

3.3 Flipping

Vejamos inicialmente como escrever $\psi(x)$ em sua versão integral. Note que, para $\Re s \geq b > 1$, temos

$$\left|\sum_{n\geq N}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n\geq N}\frac{\log n}{n^b} \to 0 \text{ quando } N\to\infty$$

de modo que $\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge uniformemente em $\Re s \geq b > 1$. Assim,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\cdot\frac{x^s}{s}ds = \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{(x/n)^s}{s}ds$$
$$= \sum_{n\leq x}\Lambda(n) + O\Big(\sum_{n\geq 1}\frac{(x/n)^b\Lambda(n)}{T|\log(x/n)|}\Big)$$

Vamos estimar o termo de erro. Dividimos a soma em dois pedaços: o primeiro contendo os termos para os quais $|\log(x/n)| \geq \log 2 \iff n \leq x/2$ ou $n \geq 2x$:

$$\sum_{\substack{n\leq x/2\\ \text{ou } n\geq 2x}}\frac{(x/n)^b\Lambda(n)}{T|\log(x/n)|} \leq \frac{x^b}{T\log 2}\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{\log n}{n^b} = O\Big(\frac{x^b}{T}\int_1^\infty\frac{\log x}{x^b}dx\Big) = O\Big(\frac{x^b}{T(b-1)}\Big)$$

O segundo termo é

$$\sum_{x/2\leq n\leq 2x}\frac{(x/n)^b\Lambda(n)}{T|\log(x/n)|} \leq \frac{2^b\log(2x)}{T}\left(\int_{x/2}^{N-1}\frac{du}{\log(N+0.5)/u} + \frac{1}{\log(N+0.5)/N} + \int_{N+1}^{2x}\frac{du}{\log u/(N+0.5)}\right)$$
$$= O\left(\frac{2^b\log(2x)}{T}\cdot x\log x\right)$$

Vejamos agora como mostrar que $\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds$ é assintoticamente igual a x. Para isto, considere a integral em torno do retângulo de vértices $b\pm iT$ e $a\pm iT$. Lembrando que $\zeta(s) = \frac{1}{s-1}+\cdots$ possui um polo simples com resíduo 1 em $s=1$ e que $\zeta(s)\neq 0$, o único polo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}$ no interior deste retângulo é $s=1$, com resíduo

$$\lim_{s\to 1} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\cdot(s-1) = \lim_{s\to 1}\frac{-\zeta'(s)(s-1)^2}{\zeta(s)(s-1)}\cdot\frac{x^s}{s} = x$$

Portanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{b+iT}^{a+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{a-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{b-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds = x$$

Agora fazemos algumas estimativas. Temos

$$\left|\int_{b-iT}^{a-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds\right| = \left|\int_{b+iT}^{a+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds\right| \leq \int_a^b\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right|\cdot\frac{x^\sigma}{T}d\sigma = O\left(\frac{x^b}{\log x}\cdot\frac{\log^2 T}{T}\right)$$

Finalmente

$$\left|\int_{a+iT}^{a-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds\right| \leq \int_{-T}^{T}\left|\frac{\zeta'(a+it)}{\zeta(a+it)}\right|\cdot\frac{x^a}{|a+it|}dt = O\left(\frac{x^a}{a}\int_0^2 dt + x^a\log^2 T\int_2^T\frac{dt}{t}\right) = O(x^a\log^3 T)$$

Para concluir o teorema, basta fazer as escolhas

$$b = 1+\frac{1}{\log x} \qquad T = \exp\sqrt{\log x}$$

3.4 Poor man's Riemann Hypothesis

Esta é a estimativa mais delicada da prova. A prova agora emprega um engenhoso truque, devido a Mertens, baseado na identidade

$$\boxed{3+4\cos\theta+\cos 2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0}$$

que implica
$$-3\Re\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\Re\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} - \Re\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)} \geq 0 \qquad (*)$$
para t e $\sigma > 1$ reais utilizando a expansão
$$-\Re\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)\Re(n^{-\sigma-it}) = \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)n^{-\sigma}\cos(t\log n)$$

Para relacionar a desigualdade acima com os zeros de $\zeta(s)$, vamos obter algumas estimativas para os três termos em $(*)$. A ideia básica é utilizar a seguinte decomposição em "frações parciais"
$$\boxed{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + B - \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) - \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)}$$

onde B é uma constante e ρ percorre todos os zeros não trivias de $\zeta(s)$ (i.e., com $0 \leq \Re\rho \leq 1$). Esta fórmula é discutida mais tarde, por hora vejamos como ela encerra a prova do teorema. Mencionamos que existem maneiras mais elementares de deduzir estimativas um pouco piores, mas já suficientes para demonstrar o Teorema dos Números Primos, porém um tanto trabalhosas (ver por exemplo o livro do Landau citado na bibliografia). Então, por preguiça, vou apresentar esta prova mais simples.

Seja σ e t reais com $0 \leq \sigma \leq 2$ e $|t| \geq 2$. Para $s = \sigma + it$ temos
$$\left|\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \leq \sum_{1\leq n\leq |t|}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) + \sum_{n>|t|}\frac{|s|}{4n^2} = O(\log|t|)$$
de modo que
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) + O(\log|t|) \qquad (\dagger)$$

Agora suponha $\sigma > 1$. Como $0 \leq \Re\rho \leq 1$, temos $\Re\frac{1}{\rho} \geq 0$ e $\Re\frac{1}{s-\rho} \geq 0$, para um zero não trivial $\rho = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos
$$\begin{aligned}
-\Re\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} &\leq \frac{1}{\sigma-1} + O(1)\\
-\Re\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} &\leq -\Re\frac{1}{\sigma+it-\rho} + O(\log|t|) = -\frac{1}{\sigma-a} + O(\log|t|)\\
-\Re\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)} &\leq O(\log|t|)
\end{aligned}$$
Logo, de $(*)$, temos
$$\frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-a} + O(\log|t|) \geq 0$$
Ou seja, para alguma constante $A > 0$, temos
$$\frac{3}{\sigma-1} + A\log|t| \geq \frac{4}{\sigma-a}$$
Se agora $a = 1-\delta$ para algum $\delta > 0$, tomando $\sigma = 1+4\delta$ obtemos $A\log|t| \geq 1/20\delta \iff \delta \geq c/\log(|t|+2)$ para alguma constante $c > 0$. Isto mostra que $\zeta(s) \neq 0$ na região
$$\Re s \geq 1 - \frac{c}{\log(|\Im s|+2)}, \qquad |\Im s| \geq 2$$

Vamos agora obter uma estimativa para $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$. Inicialmente, tome $s = 2 + it$ em $(\dagger)$:
$$\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = \sum_{\rho}\left(\frac{1}{2+it-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) + O(\log|t|)$$

Como $|\zeta'(2+it)/\zeta(2+it)| \le \sum_{n\ge 1} \Lambda(n)/n^2 = O(1)$, obtemos

$$\sum_\rho \left(\frac{1}{2+it-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) = O(\log |t|) \tag{‡}$$

Esta expressão permite obter algumas estimativas sobre a distribuição dos zeros não triviais de $\zeta(s)$. Por exemplo, como $\Re \frac{1}{\rho} \ge 0$ e $\Re \frac{1}{2+it-\rho} \ge 1/5$ se $|t - \Im\rho| \le 1$, temos que

$$\#\{\rho \mid \rho \text{ é zero não trivial e } |t-\Im\rho| \le 1\} = O(\log |t|)$$

Da mesma forma, se $|t-\Im\rho| \ge 1$, como $\Re \frac{1}{2+it-\rho} \ge \frac{1/5}{(t-\Im\rho)^2}$, temos

$$\sum_{|t-\Im\rho|\ge 1} \frac{1}{(t-\Im\rho)^2} = O(\log |t|)$$

Vamos retornar à estimativa para $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$. Subtraindo (‡) de (†) ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log |t|) \\ &= \sum_{|t-\Im\rho|\le 1} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + \sum_{|t-\Im\rho|\ge 1} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log |t|) \end{aligned}$$

Se $|t-\Im\rho| \ge 1$, como $\Re s \ge 0$ temos

$$\sum_{|t-\Im\rho|\ge 1} \left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right| \le \sum_{|t-\Im\rho|\ge 1} \frac{2}{(t-\Im\rho)^2} = O(\log |t|)$$

Por outro lado, se $|t-\Im\rho| \le 1$ e

$$\Re s \ge 1 - \frac{c}{2\log(T+2)}, \qquad 2 \le |\Im s| \le T-1,$$

como já sabemos que

$$\Re\rho \le 1 - \frac{c}{\log(|\Im\rho|+2)} \le 1 - \frac{c}{\log(T+2)},$$

temos

$$\left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right| \le \frac{1}{|s-\rho|} + 1 \le \frac{2}{c}\log(T+2) + 1$$

Como a quantidade de ρ's satisfazendo $|t-\Im\rho| \le 1$ é $O(\log T)$, obtemos

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \le \frac{2}{c}\log(T+2) \cdot O(\log T) + O(\log T) = O(\log^2 T)$$

4 Mais sobre Zeta

Por fim, algumas palavras sobre como obter a decomposição em "frações parciais" da função zeta. Como este material é relativamente padrão dos livros de Teoria dos Números e Análise Complexa (e como a Nelly está me cobrando urgentemente este material), aqui vou só fazer alguns comentários. Primeiramente, temos a famosa

Teorema 4.1 (Equação Funcional) *A função $\zeta(s)$ se estende a uma função meromorfa em todo o plano complexo. A função*

$$\boxed{\Xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)}$$

é inteira e satisfaz a equação funcional

$$\boxed{\Xi(s) = \Xi(1-s)}$$

Aqui, $\Gamma(s)$ denota a função gama de Euler.

Prova Ver Conway, VII, §8, p. 187 ou Neukirch, VII, p. 419. □

Como $\Gamma(s)$ possui polos simples em $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$, temos da equação acima que $\zeta(-2n) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, os chamados *zeros triviais*. Como vimos, qualquer outro zero de $\zeta(s)$ pertence à região $0 < \Re s < 1$ e são simétricos em relação à reta $\Re s = 1/2$ pela equação funcional. A hipótese de Riemann conjectura que na verdade todos estes zeros pertencem à reta $\Re s = 1/2$.

Agora um resultado geral de funções inteiras (ver Conway, XI, p. 279) implica que

Teorema 4.2 *Temos a fatoração*

$$\Xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

onde ρ percorre todas as raízes (triviais e não triviais) de $\Xi(s)$.

A decomposição em "frações parciais" é obtida tomando-se a derivada logarítmica da expressão acima e separando os zeros triviais e não triviais.

5 Referências

1. J. H. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag.
2. A. A. Karatsuba, *Basic Analytic Number Theory*, Springer-Verlag.
3. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Chelsea.
4. J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag.