

Equações Diofantinas e (alguns) teoremas clássicos de teoria dos números.

Prof. Cícero Thiago

Nível 2

1. Ache todas as soluções inteiras da equação

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

2. Ache todos os inteiros positivos x e y que satisfazem a equação

$$3^x - 2^y = 7.$$

3. Encontre todos os inteiros n tais que $2^8 + 2^{11} + 2^n$ seja um quadrado perfeito.

4. Ache todos os inteiros positivos n tais que $-5^4 + 5^5 + 5^n$ seja um quadrado perfeito. Da mesma forma com $2^4 + 2^7 + 2^n$.

5. Ache todas as soluções inteiras e não negativas da equação

$$3^x - y^3 = 1.$$

6. Determine todos os inteiros positivos x , y , z tais que $2^x + 3^y = z^2$.

7. Prove que não existem inteiros positivos x e y tais que $x^3 + y^3 = 2^{2009}$. (OBM)

8. Prove que não existem soluções inteiras e positivas para a equação $3^m + 3^n + 1 = t^2$. (OBM)

9. Determine todas as soluções inteiras da equação

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy).$$

10. Sejam p e q números primos. Determine todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}.$$

11. Determine todas as soluções inteiras e não - negativas (x, y) tais que

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

(Índia)

12. Determine todas as soluções inteiras da equação

$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1.$$

(Polônia)

13. Determine todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

(Rússia)

14. Ache todos os pares de inteiros (x, y) tais que $1 + 1996x + 1998y = xy$.

(Irlanda)

15. Determine todos os pares de inteiros (m, n) tais que $m \cdot n \geq 0$ e

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3.$$

(AIME)

16. (a) Fatore a expressão $x^2 - 9xy + 8y^2$.
(b) Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$. (OBM)

17. Ache a soma dos inteiros positivos a , b , c e d tais que $ab + cd = 34$ e $ac - bd = 19$. (Bulgária)

18. Ache todos os pares de inteiros a , b tais que $a + b$ é uma raiz da equação $x^2 + ax + b = 0$. (Czech and Slovak)

19. Determine todos os pares de inteiros tais que

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2.$$

20. Determine todas as soluções inteiras da equação

$$x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 + \dots + (x + 7)^3 = y^3.$$

(Hungria)

21. Prove que a equação

$$(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + \dots + (x + 2001)^2 = y^2$$

não possui soluções inteiras.

22. Determine todas as soluções inteiras da equação $x(y + 1)^2 = 243y$.

23. Determine todos os inteiros positivos m e n tais que

$$m^2 + 161 = 3^n.$$

(OBM)

24. Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que

$$\frac{5^{n-2} - 1}{n}$$

é inteiro. (OBM)

25. Mostre que para todo primo p existe um inteiro n tal que $2^n + 3^n + 6^n - 1$ é divisível por p . (IMO Short List)

26. Determine todos os inteiros não - negativos m tais que $(2^{2m+1})^2 + 1$ é divisível por no máximo dois primos distintos. (Baltic Way)

27. Determine todos os inteiros positivos $n \geq 3$ tais que 2^{2000} é divisível por

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}.$$

(China)