# CONTEÚDO



## ARTIGOS

# AOS LEITORES

Chegamos ao número 25 da Eureka! apresentando as provas e os excelentes resultados brasileiros dos dois últimos anos em diversas competições internacionais de que o Brasil participa. Temos também quatro belos artigos e, atendendo a muitos pedidos, a volta da seção Olimpíadas ao redor do Mundo, agora com mais colaboradores. Agradecemos e continuamos estimulando a participação da comunidade olímpica na elaboração da Eureka! com problemas propostos, soluções e artigos, que têm feito da Eureka! um instrumento vivo de difusão das olimpíadas de Matemática no Brasil, contribuindo para a preparação em alto nível dos participantes da OBM em todo o país.

**Os editores**

# XI OLIMPÍADA DE MAIO
## PRIMEIRO NÍVEL

**PROBLEMA 1**

Num quadro negro havia seis figuras: um círculo, um triângulo, um quadrado, um trapézio, um pentágono e um hexágono, pintados de seis cores: azul, branco, vermelho, amarelo, verde e marrom. Cada figura tinha somente uma cor e todas as figuras eram de cores diferentes.
No dia seguinte perguntou-se qual era a cor de cada figura.
Pablo respondeu: "O círculo era vermelho, o triângulo era azul, o quadrado era branco, o trapézio era verde, o pentágono era marrom e o hexágono era amarelo."
Sofia respondeu: "O círculo era amarelo, o triângulo era verde, o quadrado era vermelho, o trapézio era azul, o pentágono era marrom e o hexágono era branco."
Pablo errou três vezes e Sofia duas vezes, e sabe-se que o pentágono era marrom.
Determine se é possível saber com certeza qual era a cor de cada uma das figuras.

**PROBLEMA 2**

Um número inteiro chama-se *autodivi* se é divisível pelo número de dois algarismos formado por seus dois últimos dígitos (dezenas e unidades). Por exemplo, 78013 é autodivi pois é divisível por 13, 8517 é autodivi pois é divisível por 17.
Encontre 6 números inteiros consecutivos que sejam autodivi e que tenham os dígitos das unidades, das dezenas e das centenas distintos de 0.

**PROBLEMA 3**

Um segmento $AB$ de largura 100 está dividido em 100 segmentos menores de largura 1 mediante 99 pontos intermediários.
Ao extremo $A$ designa-se o 0 e ao extremo $B$, o 1.
Gustavo designa a cada um dos 99 pontos intermediários um 0 ou um 1, a sua escolha, e logo pinta cada segmento de largura 1 de azul ou de vermelho, respeitando a seguinte regra:
São vermelhos todos os segmentos que têm o mesmo número em seus extremos e são azuis os segmentos que têm números diferentes em seus extremos.
Determine se Gustavo pode designar os 0's e os 1's de modo a obter exatamente 30 segmentos azuis. E 35 segmentos azuis? (Em cada caso, se a resposta é sim, mostre uma distribuição dos 0's e dos 1's, e se a resposta é não, explique o porquê.)

**PROBLEMA 4**

Há duas figuras de papel: um triângulo equilátero e um retângulo. A altura do retângulo é igual à altura do triângulo e a base do retângulo é igual à base do triângulo. Divida o triângulo em três partes e o retângulo em duas, mediante cortes retos, de modo que com os cinco pedaços possamos montar, sem buracos nem superposições, um triângulo equilátero. Para montar a figura, cada parte pode ser girada e/ou dar a volta. (Justifique que o triângulo montado é equilátero.)

### PROBLEMA 5

a) Em cada casa de um tabuleiro $7 \times 7$ se escreve um dos números: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 de forma que cada número esteja escrito em sete casas distintas. Será possível que em nenhuma fila e em nenhuma coluna fiquem escritos números consecutivos?

b) Em cada casa de um tabuleiro $5 \times 5$ se escreve um dos números: 1, 2, 3, 4 ou 5 de forma que cada número esteja escrito em cinco casas distintas. Será possível que em nenhuma fila e nenhuma coluna fiquem escritos números consecutivos?

## SEGUNDO NÍVEL

### PROBLEMA 1

Determine o menor número de três dígitos que seja o produto de dois números de dois dígitos, de forma que os sete dígitos destes três números sejam todos diferentes.

### PROBLEMA 2

Gonçalo escreve num quadro negro quatro números escolhidos entre 0, 1, 2, 3 ou 4. Pode repetir números. Nicolás realiza repetidas vezes a seguinte operação: troca um dos números, a sua escolha, pelo resto da divisão por 5 do produto de outros dois números do quadro negro, a sua escolha.

O objetivo de Nicolás é conseguir que os quatro números sejam iguais. Determine se Gonçalo pode escolher os números iniciais de forma que seja impossível a Nicolás alcançar seu objetivo.

### PROBLEMA 3

No triângulo isósceles $ABC$, com $AB = AC$, seja $M$ o ponto médio de $BC$. O Ponto $D$ no lado $BC$ é tal que $B\hat{A}D = \frac{1}{6} B\hat{A}C$. A reta perpendicular a $AD$ por $C$ corta a $AD$ em $N$ de modo que $DN = DM$. Calcule os ângulos do triângulo $ABC$.

### PROBLEMA 4

Num baile há 12 homens, numerados de 1 a 12 e 12 mulheres, numeradas de 1 a 12. A cada homem se designa um "amigo oculto" entre os outros 11. Todos dançaram todas as músicas. Na primeira música cada homem dançou com a

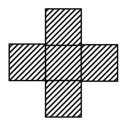
mulher que tem seu mesmo número. A partir daí, cada homem dançou uma nova música com uma mulher que havia dançado a música anterior com seu amigo oculto.
Na terceira música os casais foram:

| Homens | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mulheres | 5 | 11 | 2 | 12 | 8 | 10 | 9 | 4 | 6 | 3 | 7 | 1 |

Encontre o número do amigo oculto de cada homem.

**PROBLEMA 5**

Sobre o tabuleiro $9 \times 9$ aterrissou a nave inimiga que cobre exatamente 5 casas do tabuleiro, assim:



A nave é invisível.
Cada míssil defensivo cobre exatamente uma casa, e destrói a nave se bater numa das 5 casas que esta ocupa.
Determine o número mínimo de mísseis que são necessários para destruir com certeza a nave inimiga.

**RESULTADOS BRASILEIROS PRIMEIRO NÍVEL**

| | | |
|---|---|---|
| Leonardo Pereira Stedile | São Paulo - SP | Medalha de Ouro |
| James Jun Hong | São Paulo - SP | Medalha de Prata |
| Thiago Gonçales | Piracicaba - SP | Medalha de Prata |
| César Ilharco Magalhães | Juiz de Fora - MG | Medalha de Bronze |
| Fernando Fonseca Andrade Oliveira | Belo Horizonte - MG | Medalha de Bronze |
| Erick Magno Costa Alonso | Uberaba - MG | Medalha de Bronze |
| Maíra Islena T. da Silva | Belo Horizonte - MG | Medalha de Bronze |
| Matheus Barros de Paula | Taubaté - SP | Menção Honrosa |
| Wagner Carlos Morêto Loyola Filho | Vitória - ES | Menção Honrosa |
| André Y. O. Bastos | São Paulo - SP | Menção Honrosa |

**RESULTADOS BRASILEIROS SEGUNDO NÍVEL**

| | | |
|---|---|---|
| Henrique Pondé de Oliveira Pinto | Salvador - BA | Medalha de Ouro |
| Rafael Tupinambá Dutra | Belo Horizonte - MG | Medalha de Prata |
| Thiago Ribeiro Ramos | Varginha - MG | Medalha de Prata |
| Victor Reis de Abreu Cavalcante | Maceió - AL | Medalha de Bronze |
| Lucas Zanotto Portela | Curitiba - PR | Medalha de Bronze |
| Lucio Eiji Assaoka Hossaka | Curitiba - PR | Medalha de Bronze |
| Tiago Madeira | Itajaí - SC | Medalha de Bronze |
| Hugo Musso Gualandi | Vitória - ES | Menção Honrosa |
| Giuliano Pezzolo Giacaglia | Santo André - SP | Menção Honrosa |
| Wilson Camara Marriel | Rio de Janeiro - RJ | Menção Honrosa |
| Illan Feiman Halpern | Itatiaia - RJ | Menção Honrosa |

# XII OLIMPÍADA DE MAIO

## PRIMEIRO NÍVEL

### PROBLEMA 1

Um calendário digital exibe a data: dia, mês e ano, com 2 dígitos para o dia, 2 dígitos para o mês e 2 dígitos para o ano. Por exemplo, 01-01-01 corresponde a primeiro de janeiro de 2001 e 25-05-23 corresponde a 25 de maio de 2023. Em frente ao calendário há um espelho. Os dígitos do calendário são como os da figura abaixo:


Se 0, 1, 2, 5 e 8 se refletem, respectivamente, em 0, 1, 5, 2 e 8, e os outros dígitos perdem sentido ao se refletirem, determine quantos dias do século, ao se refletirem no espelho, correspondem também a uma data.

### PROBLEMA 2

Um retângulo de papel de 3cm × 9cm é dobrado ao longo de uma reta, fazendo coincidir dois vértices opostos. Deste modo se forma um pentágono. Calcular sua área.

### PROBLEMA 3

Há 20 pontos alinhados, separados por uma mesma distância:

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Miguel tem que pintar de vermelho três ou mais destes pontos, de maneira que os pontos vermelhos estejam separados por uma mesma distância e seja impossível pintar de vermelho exatamente um ponto a mais sem desobedecer a condição anterior. Determinar de quantas maneiras Miguel poderá fazer a tarefa.

### PROBLEMA 4

Com 150 cubinhos brancos de 1 × 1 × 1 arma-se um paralelepípedo de 6 × 5 × 5, pintam-se as seis faces de azul e logo se desarma o paralelepípedo. Lucrecia deve armar um novo paralelepípedo, sem buracos, usando exclusivamente cubinhos que tenham ao menos uma face azul e de modo que as faces do paralelepípedo de Lucrécia sejam todas completamente azuis.
Determinar as dimensões do paralelepípedo de maior volume que Lucrecia pode armar.

**PROBLEMA 5**

Em algumas casas de um tabuleiro $10 \times 10$ coloca-se uma ficha de maneira que se verifique a seguinte propriedade:

Para cada casa que tem uma ficha, a quantidade de fichas colocadas em sua mesma linha deve ser maior ou igual que a quantidade de fichas colocadas em sua mesma coluna.

Quantas fichas pode haver no tabuleiro?

Diga todas as possibilidades.

## SEGUNDO NÍVEL

**PROBLEMA 1**

Determinar todos os pares de números naturais $a$ e $b$ tais que $\dfrac{a+1}{b}$ e $\dfrac{b+1}{a}$ são números naturais.

**PROBLEMA 2**

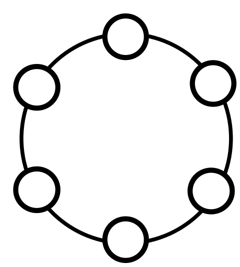
No quadro negro estão escritos vários números primos (alguns deles repetidos). Mauro somou os números do quadro negro e Fernando multiplicou os números do quadro negro. O resultado que obteve Fernando é igual a 40 vezes o resultado que obteve Mauro. Determinar quais podem ser os números do quadro negro.

Diga todas as possibilidades.

**PROBLEMA 3**

Escrever um número inteiro positivo em cada casa de modo que:

– Os seis números sejam distintos.
– A soma dos seis números seja 100.



Se cada número é multiplicado pelo seu vizinho (no sentido dos ponteiros do relógio) e se somam os seis resultados das seis multiplicações, obtém-se o menor valor possível.

Explicar por que não é possível obter um valor menor.

**PROBLEMA 4**

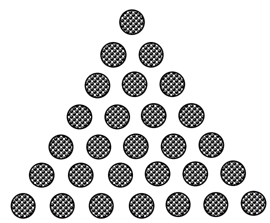
Seja $ABCD$ um trapézio de bases $AB$ e $CD$. Seja $O$ o ponto de interseção de suas diagonais $AC$ e $BD$. Se a área do triângulo $ABC$ é 150 e a área do triângulo $ACD$ é 120, calcular a área do triângulo $BCO$.

**PROBLEMA 5**

Com 28 pontos forma-se uma "grade triangular" de lados iguais, como se mostra na figura abaixo.

Uma operação consiste em escolher três pontos que sejam os vértices de um triângulo equilátero e retirar estes três pontos da grade. Se após realizar várias destas operações resta somente um ponto, em quais posições pode ficar esse ponto?

Determinar todas as possibilidades e indicar em cada caso as operações realizadas. Justificar por que o ponto que restou não pode estar numa outra posição.



## RESULTADOS BRASILEIROS PRIMEIRO NÍVEL

| | | |
|---|---|---|
| Matheus Barros de Paula | Taubaté - SP | Medalha de Ouro |
| César Ilharco Magalhães | Juiz de Fora - MG | Medalha de Prata |
| Henrique L. de Mello | Rio de Janeiro - RJ | Medalha de Prata |
| Iuri Rezende Souza | Mineiros - GO | Medalha de Bronze |
| Elder Massahiro Yoshida | São Paulo - SP | Medalha de Bronze |
| Deborah Barbosa Alves | São Paulo - SP | Medalha de Bronze |
| Victor Gonçalves Elias | João Pessoa - PB | Medalha de Bronze |
| Leonardo Gonçalves Fischer | Fraiburgo - SC | Menção Honrosa |
| Wagner Carlos Morêto Loyola Filho | Vitória - ES | Menção Honrosa |
| Ivan Seiki Hellmeister | São Paulo - SP | Menção Honrosa |

## RESULTADOS BRASILEIROS SEGUNDO NÍVEL

| | | |
|---|---|---|
| Thiago Ribeiro Ramos | Varginha - MG | Medalha de Ouro |
| Marcelo Tadeu de Sá O. Sales | Barreiras - BA | Medalha de Prata |
| Rafael Horimoto de Freitas | São Paulo - SP | Medalha de Prata |
| Renan Henrique Finder | Joinville - SC | Medalha de Bronze |
| Illan Feiman Halpern | Itatiaia - RJ | Medalha de Bronze |
| Renan Lima Novais | Niterói - RJ | Medalha de Bronze |
| Rafael Rabelo de Carvalho | Brasília - DF | Medalha de Bronze |
| Rafael Pacheco Gomes | Fortaleza - CE | Menção Honrosa |
| Caio Sérgio Parente Silva | Rio de Janeiro - RJ | Menção Honrosa |
| Hugo Fonseca Araújo | Juiz de Fora - MG | Menção Honrosa |

# XVI OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Enunciados e Resultado Brasileiro

A XVI Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Sucre, Bolívia no período de 14 a 23 de Maio de 2005. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Emanuel Augusto de Souza Carneiro e Davi Alexandrino Nogueira, ambos da cidade de Fortaleza – CE.

**RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA**

| | | |
|---|---|---|
| BRA1 | Henrique Pondé de Oliveira Pinto | Medalha de Ouro |
| BRA2 | Guilherme R. Nogueira de Souza | Medalha de Ouro |
| BRA3 | Edson Augusto Bezerra Lopes | Medalha de Prata |
| BRA4 | Rafael Tupynambá Dutra | Medalha de Prata |

**PRIMEIRO DIA**

**PROBLEMA 1**
Considere a seguinte seqüência:
$a_1$ = último dígito da soma dos dígitos do número 2005
$a_2$ = último dígito da soma dos dígitos do número 20052005
$a_3$ = último dígito da soma dos dígitos do número 200520052005 ...
$a_n$ = último dígito da soma dos dígitos do número $\underbrace{20052005\ldots2005}_{n \text{ vezes } 2005}$

Calcule: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot + a_{2005}$

**PROBLEMA 2**
Seja $ABC$ um triângulo acutângulo e sejam $AN$, $BM$ e $CP$ as alturas relativas aos lados $BC$, $CA$ e $AB$, respectivamente. Sejam $R$, $S$ as projeções de $N$ sobre os lados $AB$, $CA$, respectivamente, e $Q$, $W$ as projeções de $N$ sobre as alturas $BM$ e $CP$, respectivamente.

Mostre que $R$, $Q$, $W$, $S$ são colineares;
Mostre que $MP = RS – QW$.

**PROBLEMA 3**

A unidade monetária de um certo país se chama *reo*, e todas as moedas que circulam são de números inteiros de *reos*. Em um grupo de três pessoas, cada uma tem 60 *reos* em moedas (mas não se sabe que tipo de moedas cada uma tem). Cada uma das três pessoas pode pagar a cada uma das outras qualquer valor inteiro entre 1 e 15 *reos*, inclusive, talvez com troco. Mostre que as três pessoas em conjunto podem pagar exatamente (sem troco) qualquer valor inteiro entre 45 e 135 *reos*, inclusive.

**SEGUNDO DIA**

**PROBLEMA 4**

Seja $ABC$ um triângulo isósceles, com $AB = AC$. Uma reta $r$ que passa pelo incentro $I$ de $ABC$ intersecta os lados $AB$ e $AC$ nos pontos $D$ e $E$, respectivamente. $F$ e $G$ são pontos sobre o lado $BC$ tais que $BF = CE$ e $CG = BD$. Mostre que o ângulo $\angle FIG$ é constante ao variar $r$.

**PROBLEMA 5**

Diremos que um número de 20 dígitos é *especial* se é impossível representá-lo como produto de um número de 10 dígitos por um número de 11 dígitos. Determine qual é a máxima quantidade possível de números consecutivos que são *especiais*.

**PROBLEMA 6**

No plano cartesiano traçamos circunferências de raio 1/20 com centros em cada ponto de coordenadas inteiras. Mostre que qualquer circunferência de raio 100 que se trace no plano intersecta pelo menos uma das circunferências pequenas.

# XVII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XVII Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Escobar, Argentina no período de 5 a 11 de Maio de 2006. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Carlos Yuzo Shine (São Paulo – SP) e Luzinalva Miranda de Amorim (Salvador – BA).

## RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

| | | |
|---|---|---|
| **BRA1** | **Henrique Pondé de Oliveira Pinto** | **Medalha de Ouro** |
| **BRA2** | **Rafael Tupynambá Dutra** | **Medalha de Prata** |
| **BRA3** | **Ramon Moreira Nunes** | **Medalha de Prata** |
| **BRA4** | **Regis Prado Barbosa** | **Medalha de Prata** |

## PRIMEIRO DIA

### PROBLEMA 1

No quadrilátero convexo $ABCD$, sejam $E$ e $F$ os pontos médios dos lados $AD$ e $BC$, respectivamente. Os segmentos $CE$ e $DF$ cortam-se em $O$. Demonstrar que se as retas $AO$ e $BO$ dividem o lado $CD$ em três partes iguais então $ABCD$ é um paralelogramo.

### PROBLEMA 2

Duas pessoas, $A$ e $B$, jogam o seguinte jogo: eles retiram moedas de uma pilha que contém, inicialmente, 2006 moedas. Os jogadores jogam alternadamente retirando, em cada jogada, 1 a 7 moedas; cada jogador guarda as moedas que retira. Se quiser, um jogador pode passar (não retirar moedas em sua vez), mas para isso deve pagar 7 moedas das que retirou da pilha em jogadas anteriores. Estas 7 moedas são colocadas em uma caixa separada e não interferem mais no jogo. Ganha quem retira a última moeda, e $A$ começa o jogo.

Determinar qual jogador pode assegurar a vitória, não importando como jogue o outro. Mostrar uma estratégia vencedora e explicar por que é vencedora.

### PROBLEMA 3

Seja $n$ um número natural. A sucessão finita $\alpha$ de inteiros positivos tem, entre seus termos, exatamente $n$ números distintos ($\alpha$ pode ter números repetidos). Além disso, se de um de seus termos qualquer subtraímos 1, obtemos uma sucessão que tem, entre seus termos, pelo menos $n$ números positivos distintos. Qual é o valor mínimo que pode ter a soma de todos os termos da sucessão $\alpha$?

**SEGUNDO DIA**

**PROBLEMA 4**

Daniel escreveu em uma lousa, de cima para baixo, uma lista de números inteiros positivos menores ou iguais a 10. Ao lado de cada número da lista de Daniel, Martín anotou a quantidade de vezes que esse número aparece na lista de Daniel e obteve assim uma lista de mesmo tamanho.
Se lemos a lista de Martín de baixo para cima obtemos a mesma lista de números que Daniel escreveu de cima para baixo. Encontre o maior tamanho que a lista de Daniel pode ter.

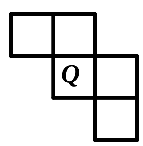
**PROBLEMA 5**

Encontrar todos os inteiros positivos $n$ tais que $\left[\sqrt{n}\right]-2$ divide $n-4$ e $\left[\sqrt{n}\right]+2$ divide $n+4$.

($[r]$ denota a parte inteira de $r$, ou seja, o maior inteiro que é menor ou igual a $r$. Por exemplo: $[2,5]=2$; $\left[\sqrt{3}\right]=1$; $[5]=5$.)

**PROBLEMA 6**

Dividimos o plano em casinhas quadradas de lado 1, traçando retas paralelas aos eixos coordenados. Cada casinha é pintada de branco ou preto. A cada segundo, recolorimos simultaneamente todas as casinhas, de acordo com a seguinte regra: cada casinha $Q$ adota a cor que mais aparece na configuração de cinco casinhas indicadas na figura




O processo de recoloração é repetido indefinidamente.

a) Determinar se existe uma coloração inicial com uma quantidade finita de casinhas pretas tal que sempre há pelo menos uma casinha preta, não importando quantos segundos se passaram desde o início do processo.

b) Determinar se existe uma coloração inicial com uma quantidade finita de casinhas pretas tal que o número de casinhas pretas, após alguma quantidade de segundos, seja pelo menos $10^{10}$ vezes maior que o número inicial de casinhas pretas.

# XLVI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

## Enunciados e Resultado Brasileiro

A XLVI Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada na cidade de Mérida – México no período de 08 a 19 de julho de 2005. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Edmilson Luis Rodrigues Motta (São Paulo – SP) e Onofre Campos da Silva Farias (Fortaleza – CE).

**RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA**

| | | |
|---|---|---|
| **BRA1** | **Gabriel Tavares Bujokas** | **Medalha de Ouro** |
| **BRA2** | **Thomás Yoiti Sasaki Hoshina** | **Medalha de Bronze** |
| **BRA3** | **Leandro Farias Maia** | **Menção Honrosa** |
| **BRA4** | **Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza** | **Menção Honrosa** |
| **BRA5** | **Levi Máximo Viana** | **** |
| **BRA6** | **Edson Augusto Bezerra Lopes** | **** |

**PRIMEIRO DIA**

**PROBLEMA 1**

São escolhidos seis pontos nos lados de um triângulo equilátero *ABC*: $A_1$ e $A_2$ em *BC*, $B_1$ e $B_2$ em $CA, C_1$ e $C_2$ em *AB*. Estes pontos são os vértices de um hexágono convexo $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ cujos lados são todos iguais. Demonstre que as retas $A_1B_2, B_1C_2$ e $C_1A_2$ são concorrentes.

**PROBLEMA 2**

Seja $a_1, a_2, \dots$ uma seqüência de inteiros que tem infinitos termos positivos e infinitos térmos negativos. Suponhamos que para cada inteiro positivo *n*, os números $a_1, a_2, \dots, a_n$ tem *n* restos distintos ao ser divididos entre *n*. Demonstre que cada inteiro se encontra exatamente uma vez na sucessão.

**PROBLEMA 3**

Sejam *x*, *y*, *z* números reais positivos tais que $xyz \geq 1$.
Demonstre que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

**SEGUNDO DIA**

**PROBLEMA 4**

Consideremos a seqüência infinita $a_1, a_2, \ldots$ definida por

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Determine todos os inteiros positivos que são relativamente primos relativos (coprimos) com todos os termos da seqüência.

**PROBLEMA 5**

Seja *ABCD* um quadrilátero convexo que tem os lados *BC* e *AD* iguais e não paralelos. Sejam *E* e *F* pontos nos lados *BC* e *AD*, respectivamente, que são distintos dos vértices e satisfazem *BE* = *DF*.

As retas *AC* e *BD* se cortam em *P* e a reta *EF* corta *AC* e *BD* respectivamente em *Q* e *R*. Consideremos todos os triângulos *PQR* que se formam quando *E* e *F* variam. Demonstre que as circunferências circunscritas a esses triângulos têm em comum outro ponto além de *P*.

**PROBLEMA 6**

Numa competição de matemática foram propostos 6 problemas aos estudantes. Cada par de problemas foi resolvido por mais de $2/5$ dos estudantes. Ninguém resolveu os 6 problemas. Demonstre que há pelo menos 2 estudantes tais que cada um tem exatamente 5 problemas resolvidos.

# XLVII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
## Enunciados e Resultado Brasileiro

A XLVII Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada na cidade de Ljubljana – Eslovênia no período de 08 a 19 de julho de 2006. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Luciano Guimarães Monteiro de Castro (Rio de Janeiro – RJ) e Pablo Rodrigo Ganassim (São Paulo – SP).

**RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA**

| | | |
|---|---|---|
| BRA1 | André Linhares Rodrigues | Medalha de Bronze |
| BRA2 | Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza | Medalha de Bronze |
| BRA3 | Leandro Farias Maia | Medalha de Bronze |
| BRA4 | Leonardo Ribeiro de Castro Carvalho | Medalha de Bronze |
| BRA5 | Rafael Mendes de Oliveira | Medalha de Bronze |
| BRA6 | Régis Prado Barbosa | Medalha de Bronze |

**PRIMEIRO DIA**

**PROBLEMA 1**

Seja $ABC$ um triângulo com incentro $I$. Um ponto $P$ no interior do triângulo verifica

$$\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}.$$

Prove que $AP \geq AI$, com igualdade se, e somente se, $P = I$.

**PROBLEMA 2**

Uma diagonal de um polígono regular $P$ de 2006 lados é um *segmento bom* se separa $P$ em duas partes, cada uma tendo um número ímpar de lados de $P$. Os lados de $P$ também são *segmentos bons*.

Divide-se $P$ em triângulos, traçando-se 2003 diagonais que, duas a duas, não se cortam no interior de $P$. Determine o maior número de triângulos isósceles nos quais dois lados são segmentos bons que podem aparecer numa divisão como essa.

**PROBLEMA 3**

Determine o menor número real $M$ tal que a desigualdade

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

é verdadeira para todos os números reais $a$, $b$, $c$.

**SEGUNDO DIA**

**PROBLEMA 4**

Determine todos os pares de inteiros ($x$, $y$) tais que

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

**PROBLEMA 5**

Seja $P(x)$ um polinômio de grau $n > 1$ com coeficientes inteiros e seja $k$ um inteiro positivo. Considere o polinômio

$Q(x)=P(P(...P(P(x))...)),$ onde $P$ aparece $k$ vezes. Prove que existem no máximo $n$ inteiros $t$ tais que $Q(t)=t.$

**PROBLEMA 6**

A cada lado $b$ de um polígono convexo $P$ associa-se a maior das áreas dos triângulos contidos em $P$ que têm $b$ como um dos lados. Prove que a soma das áreas associadas a todos os lados de $P$ é pelo menos o dobro da área de $P$.

# XX OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XX Olimpíada Iberoamericana de Matemática foi realizada na cidade de Cartagena de Índias – Colômbia no período de 22 de setembro a 1 de outubro de 2005. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Élio Mega (São Paulo – SP) e Yuri Gomes Lima (Fortaleza – CE).

**RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA**

| | | |
|---|---|---|
| **BRA1** | **Rafael Marini Silva** | **Medalha de Ouro** |
| **BRA2** | **Thomás Yoiti Sasaki Hoshina** | **Medalha de Ouro** |
| **BRA3** | **Gabriel Tavares Bujokas** | **Medalha de Ouro** |
| **BRA4** | **Thiago Costa Leite Santos** | **Medalha de Ouro** |

**PRIMEIRO DIA**

**PROBLEMA 1**

Determine todas as triplas de números reais $(x, y, z)$ que satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$xyz = 8,$$
$$x^2y + y^2z + z^2x = 73,$$
$$x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 = 98.$$

**PROBLEMA 2**

Uma pulga salta sobre os pontos inteiros de uma reta numérica. Em seu primeiro movimento salta desde o ponto 0 e cai no ponto 1. A partir daí, se num movimento a pulga salta desde o ponto $a$ e cai no ponto $b$, no seguinte movimento salta desde o ponto $b$ e cai num dos pontos $b + (b - a) - 1$, $b + (b - a)$, $b + (b - a) + 1$.

Demonstre que se a pulga caiu duas vezes sobre o ponto $n$, para $n$ inteiro positivo, então deve ter feito ao menos $t$ movimentos, onde $t$ é o menor inteiro maior ou igual a $2\sqrt{n}$.

**PROBLEMA 3**

Seja $p > 3$ um número primo. Se

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^p} = \frac{n}{m}$$

onde o máximo divisor comum de $n$ e $m$ é 1, demonstre que $p^3$ divide $n$.

**SEGUNDO DIA**

**PROBLEMA 4**

Dados os inteiros positivos $a$ e $b$, denota-se por $(a \nabla b)$ o resto que é obtido ao dividir $a$ por $b$. Este resto é um dos números 0, 1,…, $b$ – 1. Encontre todos os pares de números ($a$, $p$) tais que $p$ é primo e vale:

$$(a \nabla p)+(a \nabla 2p)+(a \nabla 3p)+(a \nabla 4p)=a+p.$$

**PROBLEMA 5**

Seja $O$ o circuncentro de um triângulo acutângulo $ABC$ e $A_1$ um ponto no arco menor $BC$ da circunferência circunscrita ao triângulo $ABC$. Sejam $A_2$ e $A_3$ pontos nos lados $AB$ e $AC$ respectivamente, tais que $\angle BA_1A_2 = \angle OAC$ e $\angle CA_1A_3 = \angle OAB$. Demonstre que a reta $A_2A_3$ passa pelo ortocentro do triângulo $ABC$.

**PROBLEMA 6**

Dado um inteiro positivo $n$, num plano consideram-se $2n$ pontos alinhados $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Cada ponto é pintado de azul ou vermelho mediante o seguinte procedimento:

No plano dado são traçadas $n$ circunferências com diâmetros de extremos $A_i$ e $A_j$, disjuntas duas a duas. Cada $A_k, 1 \le k \le 2n,$ pertence exatamente a uma circunferência. Pintam-se os pontos de modo que os dois pontos de uma mesma circunferência levem a mesma cor.

Determine quantas colorações distintas dos $2n$ pontos podem-se obter ao variar as $n$ circunferências e a distribuição das duas cores.

# XXI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
## Enunciados e Resultado Brasileiro

A XXI Olimpíada Iberoamericana de Matemática foi realizada na cidade de Guayaquil – Equador no período de 22 de setembro a 1 de outubro de 2006. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Paulo Cézar Pinto Carvalho (Rio de Janeiro – RJ) e Cícero Thiago Magalhães (Fortaleza – CE).

### RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

| | | |
|---|---|---|
| BRA1 | André Linhares Rodrigues | Medalha de Ouro |
| BRA2 | Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza | Medalha de Ouro |
| BRA3 | Leandro Farias Maia | Medalha de Prata |
| BRA4 | Leonardo Ribeiro de Castro Carvalho | Medalha de Prata |

### PRIMEIRO DIA

### PROBLEMA 1
No triângulo escaleno *ABC*, com $\angle BAC = 90°$, consideram-se as circunferências inscrita e circunscrita. A reta tangente em *A* à circunferência circunscrita corta a reta *BC* em *M*. Sejam *S* e *R* os pontos de tangência da circunferência inscrita com os catetos *AC* e *AB*, respectivamente. A reta *RS* corta a reta *BC* em *N*. As retas *AM* e *SR* cortam-se em *U*. Demonstre que o triângulo *UMN* é isósceles.

### PROBLEMA 2
Consideram-se *n* números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ não necessariamente distintos. Seja *d* a diferença entre o maior e o menor deles e seja

$$s = \sum_{i<j} \left(a_i - a_j\right)$$

Demonstre que

$$(n-1)d \le s \le \frac{n^2 d}{4}$$

e determine as condições que devem satisfazer estes *n* números para que se verifique cada uma das igualdades.

### PROBLEMA 3
Colocam-se os números $1,2,3,\ldots,n^2$ nas casas de um tabuleiro $n \times n$, em alguma ordem, um número por casa. Uma ficha encontra-se inicialmente na casa com o número $n^2$. Em cada passo, a ficha pode mover-se para qualquer das casas que têm

um lado em comum com a casa onde se encontra. Primeiro, a ficha desloca-se para a casa com o número 1, e para isso toma um dos caminhos mais curtos (com menos passos) entre o $n^2$ e o 1. Da casa com o número 1 desloca-se para a casa com o número 2, a partir daí para a casa com o número 3, e assim sucessivamente, até regressar à casa inicial, tomando em cada um desses deslocamentos o caminho mais curto. A ficha dá $N$ passos no percurso completo. Determine o menor valor e o maior valor possíveis de $N$.

**SEGUNDO DIA**

**PROBLEMA 4**

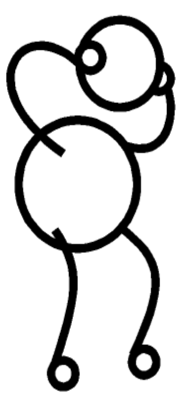
Determine todos os pares $(a, b)$ de inteiros positivos tais que $2a+1$ e $2b-1$ sejam primos entre si e $a+b$ divida $4ab+1$.

**PROBLEMA 5**

Dada uma circunferência **C** , considere um quadrilátero $ABCD$ com os seus quatro lados tangentes a **C**, com $AD$ tangente a **C** em $P$ e $CD$ tangente a **C** em $Q$. Sejam $X$ e $Y$ os pontos em que $BD$ corta **C**, e $M$ o ponto médio de $XY$. Demonstre que $\angle AMP = \angle CMQ$.

**PROBLEMA 6**

Seja $n > 1$ um inteiro ímpar. Sejam $P_0$ e $P_1$ dois vértices consecutivos de um polígono regular de $n$ lados. Para cada $k \geq 2$, define-se $P_k$ como o vértice do polígono dado que se encontra na mediatriz de $P_{k-1}$ e $P_{k-2}$. Determine para que valores de $n$ a sucessão $P_0, P_1, P_2, \ldots$ percorre todos os vértices do polígono



## Você sabia…

Que $2^{32582657}-1$ é primo ? Ele tem 9808358 dígitos e é o maior primo conhecido no momento. Foi descoberto em 4 de setembro de 2006 por Curtis Cooper e Steven Boone, dois participantes do GIMPS, que já tinham descoberto o primo $2^{30402457}-1$, o segundo maior primo conhecido. O GIMPS é um projeto cooperativo na internet que já encontrou 10 primos de Mersenne. Veja www.mersenne.org para mais informações, inclusive como ajudar a achar outros primos de Mersenne.

# A FÓRMULA DE HERÃO

Fabiano Alberton de Alencar Nogueira

♦ Nível Intermediário

Uma fórmula que sempre exerceu sobre mim um grande fascínio é a fórmula de Herão para o cálculo da área $S$ de um triângulo qualquer de lados $a$, $b$ e $c$:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ é o semi-perímetro do triângulo. Sua dedução, no entanto, apresenta na maioria dos livros uma certa dose de artificialidade. O objetivo deste artigo é sugerir uma dedução que me ocorreu como sendo mais natural, além de consideravelmente curta.

A inspiração veio quando estava revirando papéis velhos, alimentando minhas saudades dos tempos em que competia nas Olimpíadas de Matemática. Numa dessas sessões de nostalgia, deparei-me com uma questão da Olimpíada Estadual de Matemática do Rio de Janeiro que propunha que se provasse uma desigualdade envolvendo as medidas periféricas de um triângulo qualquer e o raio $r$ do seu círculo inscrito:

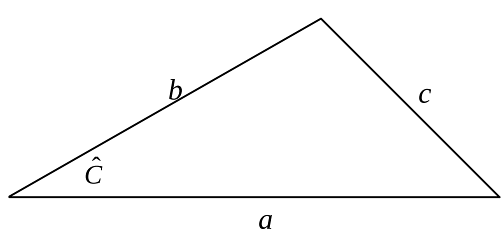
$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{r^2}$$

Refazendo sua solução, vislumbrei a possibilidade de "fazer as pazes" com a fórmula de Herão, através do que passo a expor.

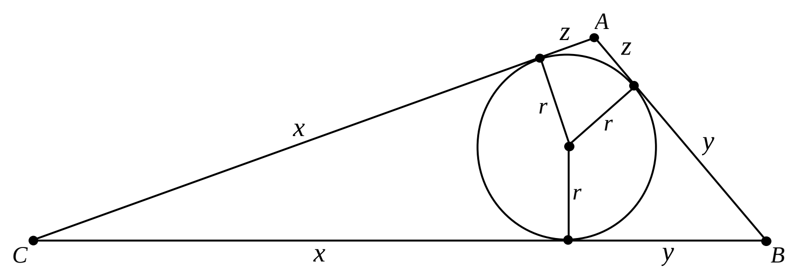
Primeiramente, listemos os pré-requisitos necessários à argumentação:

A área $S$ de qualquer triângulo é metade do produto envolvendo um par de seus lados e o seno do ângulo interno formado por eles.

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$$



Os segmentos tangentes a um mesmo círculo, traçados pelo mesmo ponto, são congruentes. A figura a seguir aplica este princípio aos três vértices de um triângulo no qual foi construído o círculo inscrito, cujo raio é *r*.

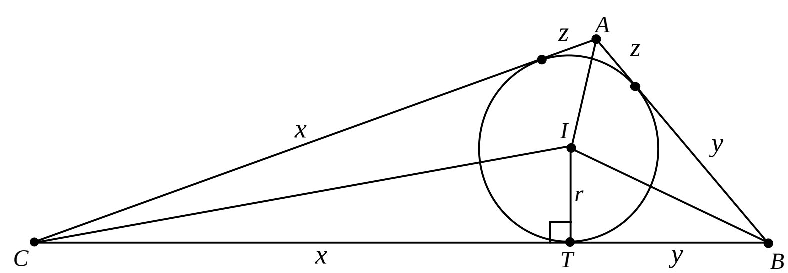



Na figura acima, as letras *x*, *y* e *z* denotam as medidas dos pares de segmentos que são congruentes por serem tangentes ao círculo inscrito, traçados respectivamente pelos vértices *C*, *B* e *A*.

Da mesma figura, retemos os fatos de que $CB = x + y$ e $CA = x + z$. Também é imediato que, sendo o perímetro

$2p = AB + CA + CB = (y+z) + (x+y) + (z+y)$, temos que $p = x + y + z$.

A área *S* de qualquer triângulo é igual ao produto do semi-perímetro pelo raio do círculo inscrito, ou seja, $S = pr$.




De fato, olhando para as bissetrizes do triângulo *ABC*, que concorrem no incentro *I*, vemos que *AI*, *BI* e *CI* dividem o interior de *ABC* em três triângulos, sendo um deles *CBI*. O raio *r* é a altura *IT* de *CBI* porque o círculo inscrito tangência o lado *CB* no ponto *T*. Portanto, ao considerarmos que a área de *CBI*, de base $CB = x + y$ e altura *r*, é dada por $\dfrac{(x+y)r}{2}$ que um raciocínio análogo permite concluir que as áreas de *ABI* e *ACI* valem, respectivamente $\frac{(y+z)r}{2}$ e $\frac{(x+z)r}{2}$, e que a área de *ABC* é a soma das áreas de *CBI*, *ABI* e *ACI*, temos:

$$S=\frac{(x+y)r}{2}+\frac{(y+z)r}{2}+\frac{(x+z)r}{2}=\frac{(2x+2y+2z)r}{2}=\frac{2pr}{2}=pr$$

O Teorema de Pitágoras e um pouco de Trigonometria, em particular a fórmula de duplicação de arcos $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, que será usada com $2\alpha=\hat{C}$.

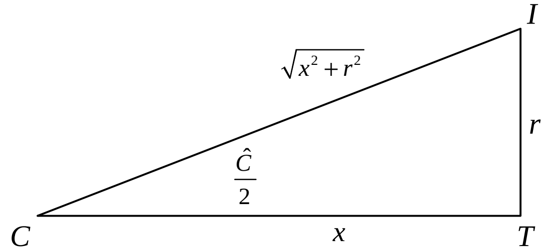
Estes são os ingredientes necessários à dedução da fórmula de Herão, numa versão extremamente simples de se memorizar: $\boxed{S=\sqrt{pxyz}}$!

E aqui vamos nós! Sem precisar dar novamente nome aos bois, temos

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}=\frac{1}{2}(x+y)(x+z)\sin 2\alpha\,,$$

onde $\alpha = B\hat{C}I=\frac{\hat{C}}{2}$. Ocorre que, no triângulo retângulo *CTI*, de catetos $x$ e $r$, podemos expressar o seno e o coseno de $\alpha=\frac{\hat{C}}{2}$ em função desses parâmetros, lançando mão do Teorema de Pitágoras:

$CI^2=CT^2+IT^2=x^2+r^2 \Rightarrow CI=\sqrt{x^2+r^2}$ .



Logo $\sin\dfrac{\hat{C}}{2}=\dfrac{IT}{CI}=\dfrac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}$ e $\cos\dfrac{\hat{C}}{2}=\dfrac{CT}{CI}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$. Por outro lado, sabendo que $\sin\hat{C}=2\sin\dfrac{\hat{C}}{2}\cos\dfrac{\hat{C}}{2}$, temos $\sin\hat{C}=2\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right)\left(\dfrac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}\right)=\dfrac{2xr}{x^2+r^2}$.

Lembrando que $S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}$, substituímos $\sin\hat{C}=\dfrac{2x\dfrac{S}{p}}{x^2+\left(\dfrac{S}{p}\right)^2}$ na fórmula da área $S=\dfrac{1}{2}(x+y)(x+z)\sin\hat{C}$. A manipulação abaixo encerra a dedução, uma vez que se $p=x+y+z$, então $x=p-c$, $y=p-b$ e $z=p-a$:

$$\cancel{S}=\frac{1}{\cancel{2}}(x+z)(x+y)\frac{\cancel{2}\dfrac{\cancel{S}}{p}x}{\left(\dfrac{S}{p}\right)^2+x^2}\Rightarrow 1=\frac{x(x+z)(x+y)}{p\left(\dfrac{S^2}{p^2}+x^2\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{S^2}{p^2}+x^2\right)=x\left(\underbrace{x^2+xy+xz}_{x(x+y+z)=xp}+zy\right)\xrightarrow{\times p}S^2+p^2x^2=p^2x^2+pxyz\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{pxyz}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**Observações:**

É bem possível e provável que algum autor já tenha feito essa dedução em essência, porém não a encontrei na minha (pobre) bibliografia.

A questão da OEM/RJ (creio ser do ano de 1988) que transcrevi pode ser resolvida usando como lema uma desigualdade bem "manjada para os alunos olímpicos": $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$, válida para quaisquer reais *a*, *b* e *c*.

O fato $S=pr$ pode e deve ser generalizado para todos os polígonos convexos circunscritíveis. Curiosamente, o caso particular dos polígonos regulares, onde o raio *r* é o apótema $a_p$, é bem mais popular do que o caso geral. Mesmo que se enfatize o caso particular $S=pa_p$, vale a pena intuir a área do círculo a partir das substituições $a_p=r$ e $p=\pi r$.

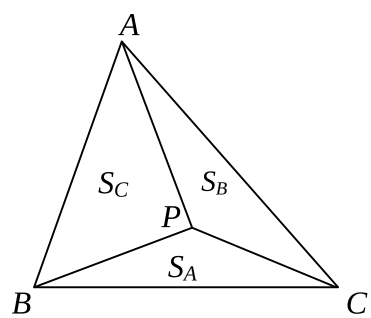
# ÁREAS PARA ACHAR RAZÕES DE SEGMENTOS

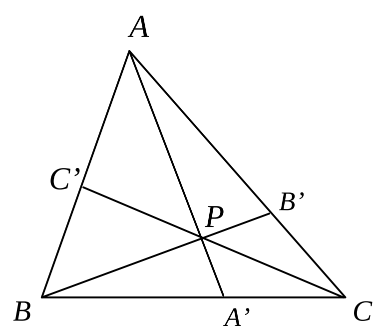
Cícero Thiago e Marcelo Mendes - Grupo Teorema de Matemática

♦ Nível Avançado

Apresentaremos aqui uma simples, poderosa e útil ferramenta geométrica para problemas envolvendo razões de segmentos. Como convenção, denotemos por $[Q]$ a área do polígono $Q$.

Seja $ABC$ um triângulo e $P$, um ponto em seu interior. Sejam $S = [ABC]$, $S_A = [PBC]$, $S_B = [PAC]$ e $S_C = [PAB]$ (veja a figura abaixo, à esquerda). Temos $S = S_A + S_B + S_C$.




Agora, prolongue $AP$ até $A'$ sobre $BC$, e defina $B'$ e $C'$ analogamente (veja figura acima, à direita). Como triângulos com mesma altura têm áreas proporcionais a suas bases, temos:

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{[PAB]}{[PBA']} = \frac{[PAC]}{[PCA']} = \frac{[PAB]+[PAC]}{[PBA']+[PCA']} = \frac{S_C + S_B}{S_A}.$$

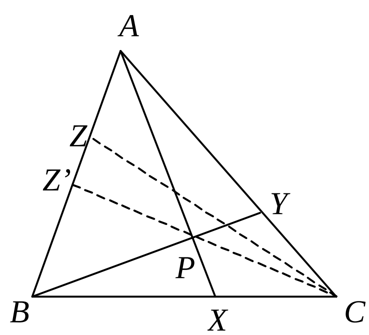
Analogamente, $\frac{BP}{PB'} = \frac{S_A + S_C}{S_B}$ e $\frac{CP}{PC'} = \frac{S_A + S_B}{S_c}$. Por outro lado, também temos $\frac{BA'}{A'C} = \frac{[PBA']}{[PCA']} = \frac{[ABA']}{[ACA']} = \frac{[PAB]}{[PAC]} = \frac{S_C}{S_B}$.

Da mesma forma, $\frac{CB'}{B'A} = \frac{S_A}{S_C}$ e $\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_B}{S_A}$.

Vejamos alguns exemplos.

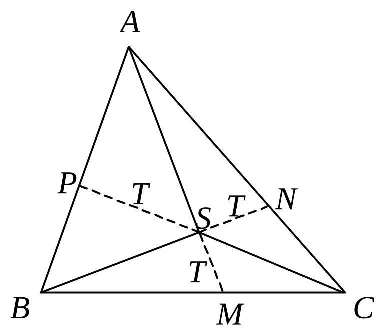
**Exemplo 1:** Prove o teorema de Ceva: $AX$, $BY$, $CZ$ são cevianas concorrentes de um triângulo $ABC \Leftrightarrow \frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$.

**Solução:** Primeiro, suponha que $AX$, $BY$, $CZ$ sejam concorrentes. Pela teoria acima, temos $\frac{AZ}{ZB}=\frac{S_B}{S_A}$, $\frac{BX}{XC}=\frac{S_C}{S_B}$, $\frac{CY}{YA}=\frac{S_A}{S_C}$ e, diretamente, $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$.
Reciprocamente, se $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$ e $CZ$ não passasse pela interseção $P$ de $AX$ e $BY$, então, sendo $Z'$ a interseção de $CP$ e $AB$, teríamos pela primeira parte que $\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$. Portanto $\frac{AZ}{ZB}=\frac{AZ'}{Z'B}$, um absurdo. Logo, $CZ$ passa por $P$ e $AX$, $BY$ e $CZ$ são concorrentes.




**Exemplo 2:** (HUNGRIA/1936) $S$ é um ponto no interior do $\Delta ABC$ tal que as áreas dos triângulos $ABS$, $BCS$, $CAS$ são todas iguais. Prove que $S$ é o baricentro de $ABC$.

**Solução:** Seja $T$ a área dos triângulos $ABS$, $BCS$, $CAS$. Daí, sendo $M$, $N$ e $P$ as interseções de $AS$, $BS$ e $CS$ com os lados opostos, temos $\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}=\frac{T}{T}=1$, isto é, $M$, $N$ e $P$ são os pontos médios dos lados $BC$, $CA$ e $AB$ e, portanto, $S$ é o baricentro de $ABC$.




**Exemplo 3:** (BANCO IMO/1996) Seja $ABC$ um triângulo acutângulo com circuncentro $O$ e raio $R$. Seja $A_1 \neq O$ o ponto de interseção de $AO$ com a circunferência circunscrita ao triângulo $BOC$ e defina analogamente $B_1$ e $C_1$. Mostre que $OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 \geq 8R^3$. Quando ocorre a igualdade?

**Solução:**
Sejam $D$, $E$ e $F$ as interseções de $AO$, $BO$ e $CO$ com $BC$, $CA$ e $AB$, respectivamente. É fácil ver que $AO = BO = CO = R$. Usando as relações provadas acima temos que:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{[AOB]+[AOC]}{[BOC]}, \frac{BO}{OE} = \frac{[AOB]+[BOC]}{[AOC]}$$

$$\frac{CO}{OF} = \frac{[AOC]+[BOC]}{[AOB]}.$$

Faça $[AOB] = x, [AOC] = y, [BOC] = z$. É fácil perceber que $D\hat{C}O = C\hat{B}O = C\hat{A}O$ e que $C\hat{O}D$ é comum a $\Delta \hat{O}A_1C$ e $\Delta DCO$, logo $\Delta OA_1C \sim \Delta OCD$. Com isso,

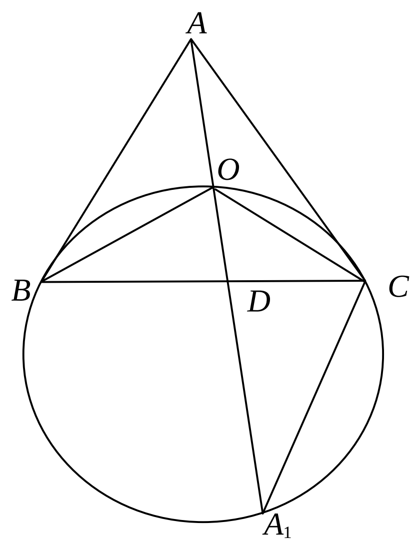
$$\frac{R}{OD} = \frac{OA_1}{R} \Rightarrow OA_1 = \frac{R^2}{OD}$$ e analogamente,

$$OB_1 = \frac{R^2}{OE}$$ e $$OC_1 = \frac{R^2}{OF}$$. Então,

$$OA_1.OB_1.OC_1 = \frac{R^6}{OD.OE.OF} = \frac{R}{OD}\cdot\frac{R}{OE}\cdot\frac{R}{OF}\cdot R^3 = \frac{OA}{OD}\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{CO}{OF}\cdot R^3 =$$

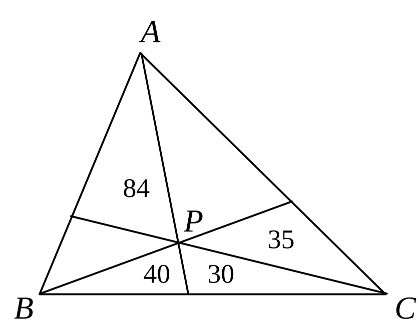
$$= \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz}\cdot R^3$$

$\geq \dfrac{2\sqrt{xy}\,2\sqrt{yz}\,2\sqrt{zx}}{xyz}R^3 = \dfrac{8xyz}{xyz}R^3 = 8R^3.$ A igualdade ocorre quando $x = y = z$.
Pelo exemplo 2, *O* tem que ser baricentro para acontecer a igualdade.




**PROBLEMAS PROPOSTOS**

**1. (IME/1990;AIME/1985)** Seja *P* um ponto no interior de um triângulo *ABC*, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 30, 35 e 84, como mostra a figura. Calcule a área do triângulo *ABC*.



**2. (IMO/1961)** Considere triângulo $P_1P_2P_3$ e um ponto $P$ no interior do triângulo. As retas $P_1P$, $P_2P$, $P_3P$ intersectam os lados opostos nos pontos $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, respectivamente. Prove que dos números $\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$, ao menos um é $\le 2$ e ao menos um é $\ge 2$.

**3. (AIME/1992)** No triângulo $ABC$, $A'$, $B'$, $C'$ estão sobre os lados $BC$, $AC$ e $AB$, respectivamente. Dado que $AA'$, $BB'$, $CC'$ são concorrentes no ponto $O$ e que $\frac{AO}{OA'}+\frac{BO}{OB'}+\frac{CO}{OC'}=92$, encontre o valor de $\frac{AO}{OA'}\cdot\frac{BO}{OB'}\cdot\frac{CO}{OC'}$.

**4.** Seja $P$ um ponto no interior do $\Delta ABC$. Sejam $D$, $E$, $F$ as interseções de $AP$, $BP$, $CP$ com $BC$, $CA$, $AB$, respectivamente. Prove que $\frac{PA}{PD}\cdot\frac{PB}{PE}+\frac{PB}{PE}\cdot\frac{PC}{PF}+\frac{PC}{PF}\cdot\frac{PA}{PD}\ge 12$.

**5.** No triângulo $ABC$, os pontos $L$, $M$, $N$ estão sobre $BC$, $AC$, $AB$, respectivamente, e $AL$, $BM$, $CN$ são concorrentes.

Encontre o valor numérico de $\frac{PL}{AL}+\frac{PM}{BM}+\frac{PN}{CN}$.

Encontre o valor numérico de $\frac{AP}{AL}+\frac{BP}{BM}+\frac{CP}{CN}$.

**6. (IBERO/1985)** Se $AD$, $BE$, $CF$ são cevianas concorrentes no circuncentro $O$ do $\Delta ABC$, demonstre que $\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{R}$.

Sugestão: Usar problema 5

**7.** Em um $\Delta ABC$, $AD$, $BE$, $CF$ são concorrentes no ponto $P$ tal que $AP = PD = 6$, $EP = 3$, $PB = 9$ e $CF = 20$. Qual é a área do $\Delta ABC$?

**8.** Em um triângulo $ABC$, seja $S$ o ponto médio da mediana correspondente ao vértice $A$ e $Q$, o ponto de interseção de $BS$ com o lado $AC$. Mostre que $BS = 3QS$.

**9.** Seja $ABC$ um triângulo e $P$ um ponto em seu interior tal que $AP$, $BP$ e $CP$ intersectam os lados $BC$, $CA$ e $AB$ nos pontos $D$, $E$ e $F$, respectivamente. Se $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$, $PD = PE = PF = 3$ e $a + b + c = 43$. Determine $abc$.

# PROBLEMAS SOBRE PONTOS

Davi Máximo (UFC) e Samuel Feitosa (UFC)

♦ Nível Avançado

Distribuir pontos num plano ou num espaço é uma tarefa que pode ser realizada de forma muito arbitrária. Por isso, problemas sobre pontos podem ser de diversas naturezas. Nesse artigo, trataremos as principais técnicas para resolver esses tipos de problemas,

## 1. Fecho Convexo

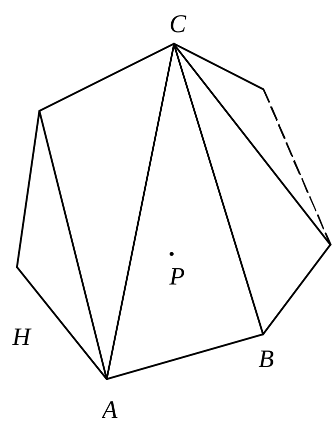
Pense no seguinte: dados $n$ pontos num plano, podemos escolher alguns deles formando o único polígono convexo que contém, junto com seu bordo e seu interior, todos os $n$ pontos. Tal afirmação pode ser provada por indução (que alias, é uma ferramenta que sempre deve ser lembrada em problemas de matemática discreta em geral). Tal polígono é chamado o *fecho convexo* desses $n$ pontos. Vamos ver que tão pouco já nos ajuda bastante em alguns problemas sobre pontos.

**PROBLEMA 1**

Seja $S$ um conjunto finito de pontos, não havendo três colineares, tal que dados quaisquer 4 pontos de $S$ eles formam um quadrilátero convexo. Mostre que $S$ é um conjunto de vértices de um polígono convexo.

**SOLUÇÃO:**

Seja $H$ o fecho convexo de $S$.




Suponha um ponto $P$ de $S$ no interior de $H$. Escolha uma triangulação de $H$ (assim como o fecho convexo, é simples provar que todo polígono convexo pode ser dividido por triângulos tendo como lados diagonais ou lados do polígono, tente indução).
Assim, $P$ fica no interior de algum triângulo $ABC$. Logo, o quadrilátero $ABCP$ não é convexo, absurdo!
Portanto, $S$ não pode ter pontos no interior do seu fecho convexo, donde $S$ é convexo, já que $S$ não contém três pontos colineares.

Os próximos problemas são resolvidos similarmente.

**PROBLEMA 2**

Mostre que dados 5 pontos, não três colineares, existe um quadrilátero convexo com vértices nesses pontos.

**PROBLEMA 3**

Mostre que dado qualquer conjunto finito de pontos no plano existe uma reta por dois destes pontos que divide o plano em dois semi-planos de modo que um desses semi-planos não contém nenhum ponto do conjunto.

**PROBLEMA 4**

(Lista Cone Sul 2001) É possível que a reunião de um número finito de quadriláteros não convexos seja um polígono convexo?
Podemos definir fecho convexo para um conjunto $X$ qualquer do plano. Ele é o "menor" conjunto convexo que contém $X$.

**Definição:** O *fecho convexo* H de $X$ é a interseção de todos os conjuntos convexos do plano que contém $X$.

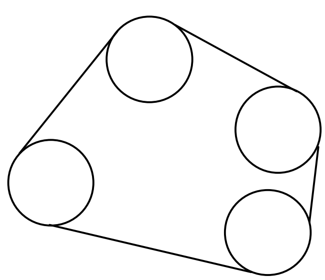
Deixamos para o leitor a verificação dos seguintes fatos:

*i-)* $H$ é convexo

*ii-)* No caso de um conjunto com um número finito de pontos esta definição implica que $H$ é um polígono convexo cujos vértices pertencem a este conjunto.

**PROBLEMA 5**

Dado um conjunto de $N$ discos de raios unitários. Esses círculos podem se intersectar (mas não coincidir). Mostre que existe um arco de comprimento maior ou igual a $\frac{2\pi}{N}$ pertencendo à circunferência de um desses discos que não é coberto por nenhum outro disco.



(**IDÉIA DA SOLUÇÃO**) Consideremos o fecho convexo $H$ desse conjunto de discos. Um arco que esteja na borda do fecho convexo não pode ser coberto por outro disco. Mostre que a "junção" de todos os arco no bordo de $H$ é um círculo de raio unitário. Como este círculo tem perímetro $2\pi$ e no máximo juntamos $N$ arcos, pelo menos um dos arcos da junção é maior ou igual a $\frac{2\pi}{N}$ .

**PROBLEMA 6**

(OBM 96) Existe um conjunto *A* de *n* pontos ( $n \geq 3$ ) em um plano tal que:
*i*) *A* não contém três pontos colineares;
*ii*) dados quaisquer três pontos pertencentes a *A*, o centro da circunferência que contém estes pontos também pertence a *A*?
Os próximos dois problemas são de IMO e podem ser resolvidos usando só fecho convexo (na realidade, muita raça também, que é algo imprescindível em qualquer problema, principalmente de IMO).

**PROBLEMA 7**

(IMO 99/1) Determine todos os conjuntos finitos *S* de pontos do plano com pelo menos três elementos que satisfazem a seguinte condição:
Para quaisquer dois pontos distintos *A* e *B* de *S*, a mediatriz do segmento *AB* é um eixo de simetria de *S*.
(Veja a solução desse problema por Fabrício Siqueira Benevides na Eureka! N°.6)

**PROBLEMA 8**

(IMO 95/3) Determine todos os inteiros $n > 3$ para os quais existem *n* pontos $A_1, A_2, \dots, A_n$ no plano, e números reais $r_1, r_2, \dots r_n$ satisfazendo as condições:
não há três pontos $A_i, A_j, A_k$ colineares;
para cada tripla *i* ,*j*, *k* ($1 \leq i < j < k \leq n$) o triângulo $A_i A_j A_k$ tem área $r_i + r_j + r_k$.

**SOLUÇÃO:**

Vamos fazer o caso $n \geq 5$. Considere, dentre os *n* pontos, cinco pontos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ e seu fecho convexo . Temos três casos:
*1° Caso:* O Fecho Convexo é um triângulo.
Podemos assumir que tal fecho é o triângulo $A_1A_2A_3$, $A_4$ e $A_5$ estão no interior de $A_1A_2A_3$, com $A_5$ fora de $A_1A_2A_4$ e $A_4$ fora de $A_1A_2A_4$ (faça uma figura). Podemos supor que os triângulos $A_1A_2A_4$ e $A_2A_3A_5$ têm interiores disjuntos. Seguindo nossa notação para áreas, temos:
$r_1 + r_2 + r_3 = [A_1A_2A_3] > [A_1A_2A_4] + [A_2A_3A_5] = r_1 + r_2 + r_4 + r_2 + r_3 + r_5$, donde
$0 > r_4 + r_2 + r_5 = [A_2A_4A_5]$, absurdo!

*2° Caso:* O Fecho Convexo é um quadrilátero
Suponha $A_5$ no interior do fecho convexo $A_1A_2A_3A_4$. Note que
$[A_1A_2A_3A_4] = [A_1A_2A_3] + [A_1A_3A_4] = [A_1A_2A_4] + [A_2A_3A_4]$

e portanto,
$(r_1+r_2+r_3)+(r_3+r_4+r_1)=(r_1+r_2+r_4)+(r_2+r_4+r_3) \Rightarrow r_1+r_3=r_2+r_4$.
Logo, $2[A_1A_2A_3A_4]=3(r_1+r_2+r_3+r_4)$. Também,
$[A_1A_2A_3A_4]=[A_1A_2A_5]+[A_2A_3A_5]+[A_3A_4A_5]+[A_4A_1A_5]$
Logo, temos $r_5=-(r_1+r_2+r_3+r_4)/8=-[A_1A_2A_3A_4]/12<0$. Agora, observe que como $A_1, A_3, A_5$ não são colineares, podemos supor um dos lados de $\angle A_1A_3A_5<180°$. Então, um dos quadriláteros $A_1A_5A_3A_4$, $A_1A_5A_3A_2$ é convexo. Digamos, $A_1A_5A_3A_4$ convexo. Então, temos $r_1+r_3=r_4+r_5$ e portanto, ficamos com $r_2=r_5$. Analogamente, usando que $A_2, A_4, A_5$ não são colineares, temos $r_5=r_1$ ou $r_3$. Assim, três dos números $r_1, r_2, r_{3,} r_4, r_5$ são negativos, obtendo uma área negativa. Absurdo!

*3° Caso*: O Fecho convexo é um pentágono
Suponha que $r_1$ seja o menor deles. Traçando uma paralela *l* por $A_1$ à reta $A_3A_4$. Como $[A_1A_3A_4]=r_1+r_3+r_4\le r_2+r_3+r_4=[A_2A_3A_4]$, $A_2$ pertence a *l* ou ao semiplano definido por $l$ oposto ao $A_3A_4$ e, analogamente $A_5$. Como $A_1, A_2, A_5$ não podem estar todos em $l$, temos $\angle A_2A_1A_5>180°$, absurdo! .
Logo, $n\le 4$. Um exemplo para $n=4$ é um quadrado $A_1A_2A_3A_4$ de lado 1 com $r_1=r_2=r_3=r_4=1/6$.
Finalizamos essa parte com dois problemas bonitinhos.

**PROBLEMA 9**
(USAMO 2005) Seja *n* um inteiro positivo maior que 1. Suponha que são dados 2*n* pontos no plano, não havendo três colineares. Suponha que *n* dos 2*n* são pintados de azul e os outros *n* de vermelho. Uma reta no plano é dita *balanceada* se passa por um ponto azul e um ponto vermelho, e o número de pontos azuis em cada um de seus lados é igual ao número de pontos vermelhos. Prove que existem pelo menos duas retas balanceadas.
**DICA**: *Prove que cada ponto do fecho convexo dos pontos está em pelo menos uma reta balanceada.*

**PROBLEMA 10**
(Kömal 2002) Dado um conjunto qualquer de pontos no plano, não contendo três colineares, prove que é possível colorir os pontos com duas cores (azul e

vermelho) tal que todo semiplano contendo pelo menos três pontos do conjunto contenha pelo menos um ponto de cada cor.

**2. Princípio das Casas dos Pombos**

O princípio da casas dos Pombos, PCP, é importante e deve ser lembrado sempre. Ele é usado para provar existências ("...se $n+1$ pombos estão em $n$ casas, *existe* pelo menos uma casa contendo pelo menos dois pombos..."). Nossos dois primeiros problemas dessa sessão são apenas versões dificultadas daquele exercício clássico do PCP. : dados cincos pontos num quadrado unitário, existem dois cuja distância entre eles é menor que $\sqrt{2}/2$ .

**PROBLEMA 11**
(Japão 97) Prove que entre quaisquer dez pontos no interior de um círculo de diâmetro 5, existem dois cuja distância entre eles é menor que 2.

**PROBLEMA 12**
(Coréia 97) Prove que entre quaisquer quatro pontos no interior de um círculo unitário, existem dois deles cuja distância é menor que $\sqrt{2}$ .

**PROBLEMA 13**
(Rioplatense 2002) Daniel escolhe um inteiro positivo $n$ e diz a Ana. Com esta informação, Ana escolhe um inteiro $k$ e diz a Daniel. Daniel traça então $n$ circunferências em um papel e escolhe $k$ pontos distintos com a condição de que cada um deles pertença a alguma das circunferências que traçou. Em seguida, apaga as circunferências que traçou, sobrando visíveis apenas os $k$ pontos que marcou. A partir desses pontos, Ana deve reconstruir pelo menos uma das circunferências que Daniel traçou. Determinar qual o menor valor de $k$ que permite Ana alcançar seu objetivo independente de como Daniel escolha as $n$ circunferências e os $k$ pontos.

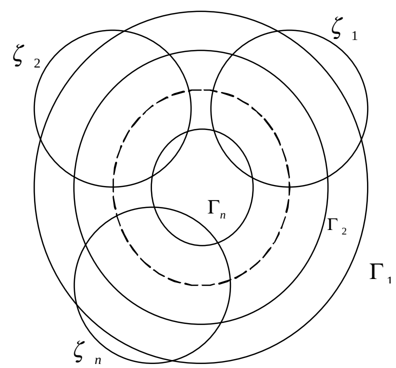
**SOLUÇÃO:**
O valor mínimo é $k=2n^2+1$.

1° Passo: $k=2n^2+1$ é suficiente.

Se são dados $2n^2+1$ pontos marcados por Daniel, como estes pontos são distribuídos em $n$ circunferências, pelo Princípio das Casas dos Pombos, pelo menos $2n+1$ deles estão em uma mesma circunferência traçada por Daniel. Então, se Ana traça todas as circunferências determinadas por estes $2n^2+1$, haverá uma delas, digamos $\Gamma$, com pelo menos $2n+1$ dos pontos. Como estes $2n+1$ pontos provém das $n$ circunferências de Daniel, três deles estão numa mesma circunferência traçada por ele, digamos $\zeta$. Logo, $\zeta$ e $\Gamma$ têm pelo menos três pontos em comum, e portanto, são a mesma circunferência (abusando da notação: $\zeta = \Gamma$). Assim, Ana consegue determinar umas das circunferências traçadas por Daniel.

2° Passo: Se $k < 2n^2 + 1$, Daniel pode traçar circunferências e escolher $k$ pontos de modo a tornar impossível para Ana determinar tais circunferências.

Basta considerar $k = 2n^2$:




Traçamos $n$ circunferências concêntricas $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ e outras $n$ circunferências $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ duas a duas disjuntas, de modo que $\zeta_i$ corta $\Gamma_j$ em dois pontos distintos, para $i$, $j$ = 1,2,...,$n$. Há exatamente $2n^2$ pontos de intersecção. Se Daniel marca estes pontos e apagas suas circunferências, Ana não conseguirá reconstruir com certeza nenhuma das circunferências, pois Daniel pode ter traçado inicialmente tanto $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ quanto $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$.

**PROBLEMA 14**

(Rioplatense 1999) Dois jogadores $A$ e $B$ disputam o seguinte jogo: $A$ escolhe um ponto de coordenadas inteiras do plano e o pinta de verde; em seguida $B$ escolhe 10 pontos de coordenadas inteiras, ainda não coloridos e os pinta de amarelo. O jogo continua assim com as mesmas regras: $A$ e $B$ escolhem um e dez pontos ainda não coloridos e os pintam de verde e amarelo, respectivamente.

(a) O objetivo de $A$ é obter $111^2$ pontos verdes que sejam as interseções de 111 retas horizontais e 111 retas verticais (i.e., paralelas aos eixos de coordenadas). O objetivo de $B$ é impedir-lhe. Determine qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora que lhe assegura seu objetivo.

(b) O objetivo de $A$ é obter quatro pontos verdes que sejam vértices de um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados. O objetivo de $B$ é impedir-lhe. Determine qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora que lhe assegura seu objetivo.

**3. Idéias Extremais**

Na matemática em geral, problemas de existência são muito comuns e importantes. São aqueles problemas que nos pedem para provar que a existência de alguma coisa. Na seção anterior, não explicitamente, nos deparamos com problemas desse tipo. E não foi para vender o artigo que iniciamos ambas as seções falando da importância dessas idéias, mas pelo o fato de que o PCP e o Princípio Extremal juntos são as ferramentas mais indispensáveis para o ataque desses problemas.

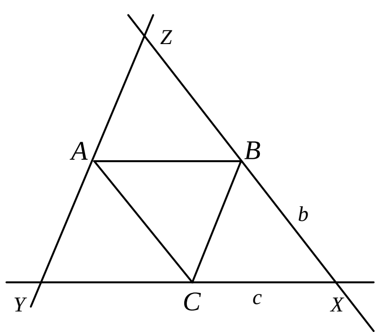
Mas afinal, que Princípio Extremal é esse? Digamos que temos um problema onde nos é pedido para provar a existência de um elemento satisfazendo uma certa propriedade *P*. Então, nós escolhemos um elemento que satisfaz maximalmente ou minimalmente, ou seja, extremalmente (será que acabamos de inventar essas palavras?) uma outra propriedade *Q*, não acidentalmente ligada com a desejada propriedade *P*. O que será que isso nos dá? Vejamos alguns problemas.

**PROBLEMA 15**

(Austrália 91) São dados $n \geq 3$ pontos no plano tais que a área de um triângulo formado por quaisquer três deles é no máximo 1. Prove que os $n$ pontos estão em um triângulo de área no máximo 4.

**SOLUÇÃO:**

Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ os *n* pontos. Dentre os triângulos considerados, seja $ABC$ o de maior área (o cara com a propriedade *Q*). Considere por *A* uma reta *a* paralela a *BC*. Sendo assim, qualquer outro ponto $P_i$ deve estar no mesmo semiplano de *B* e *C* definido por *A*, pois do contrário teríamos um absurdo $[PBC] > [ABC]$ (aqui [*X*], denota a área de *X*) . Analogamente, considerando as retas *b* e *c* por *B* e *C* paralelas a *AC* e *AB*, respectivamente, concluímos que todos os pontos *P* devem estar no triângulo *XYZ* (acompanhe a figura ao lado). Como, $[XYZ] = 4[ABC] < 4 \cdot 1 = 4$, o resultado segue. (isto é, *XYZ* satisfaz a propriedade *P*).

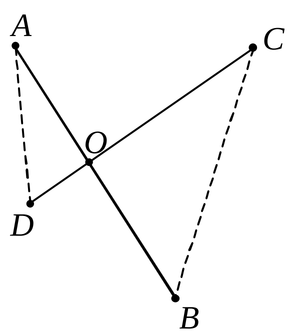


**PROBLEMA 16**

(Putnam 1979) Sejam $2n$ pontos no plano escolhidos de modo que quaisquer 3 não são colineares, $n$ deles são pintados de vermelho e n deles são pintados de azul. Prove que é possível parear os pontos usando segmentos ligando cada ponto vermelho a exatamente um ponto azul de modo que esses segmentos não se cortem.

**SOLUÇÃO:**

Existem $n^2$ maneiras de parear esses pontos. É claro que alguns desses pareamentos não cumprem a condição do enunciado. Olhemos em cada pareamento a soma dos seus segmentos. Escolha o pareamento que tem soma mínima. Suponha que nele existem dois segmentos $AB$ e $CD$ que se cortam (com $A$ e $C$ vermelhos)




Pela desigualdade triangular temos:

$$\left.\begin{array}{l} AO+OD>CD \\ OB+OC>CB \end{array}\right\} \Rightarrow AB+CD>AD+CB$$

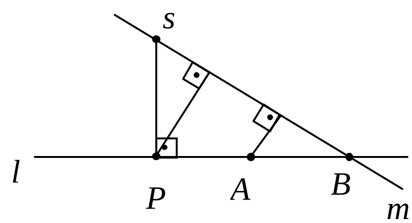
Logo se trocarmos $AB$ e $CD$ por $AD$ e $CB$ diminuiremos nossa soma. Assim neste pareamento não temos dois segmentos que se cortam.

**PROBLEMA 17**

(Teorema de Sylvester) Um conjunto $S$ de pontos no plano tem a seguinte propriedade: qualquer reta passando por 2 pontos passa também por um terceiro. Mostre que todos os pontos estão sobre uma reta.

**SOLUÇÃO:**

Considere o conjunto $L$ das retas que passam por dois pontos de $S$. Cada ponto de S tem uma distância associada a cada reta de $L$. Como $L$ e $S$ são conjuntos finitos então temos um número finito distâncias. Considere o par $(l, s)$ do ponto $s \in S$ e $l \in L$ com a menor distância não nula associada. Como $l$ passa por dois pontos de S então deverá passar por um terceiro. Pelo menos dois pontos de $S$, digamos $A$ e $B$, deverão estar em um "mesmo lado" de $l$ determinado por $P$ (pé da perpendicular de $s$ até $l$).




Suponhamos que $A$ esteja entre $B$ e $P$. Seja $m$ a reta que passa por $B$ e $s$ então:
$\text{distância}(\text{A}, \text{m}) \le \text{distância}(\text{P}, \text{m}) <$
$< \text{distância}(\text{s}, \text{l})$ Absurdo!

Assim todas as distâncias associadas têm que ser zero! Todos os pontos são colineares!

A seguir, veja como usar o Teorema de Sylvester.

**PROBLEMA 18**

São dados $(N \ge 3)$ pontos no plano, nem todos colineares. Mostre que são necessários pelo menos $n$ retas para unir todos os possíveis pares de pontos.

**SOLUÇÃO:**

Vamos tentar usar indução. Se $N = 3$ os três pontos formarão um triângulo. As retas suportes dos três lados desse triângulo satisfazem nossa afirmação. Suponha que a afirmação seja válida para $N = k$. Considere um conjunto T de $N = k + 1$ pontos. Como nem todos esses pontos estão sobre uma mesma reta decorre do teorema de Sylvester que existe uma reta que passa por apenas dois pontos (A e B) do conjunto. Pelo menos um dos conjuntos $T \setminus \{A\}$ ou $T \setminus \{B\}$ não poderá ter todos os seus $k$ pontos colineares. Então pela hipótese teremos pelo menos $k$ retas, mas a reta $AB$ não foi contada, assim a afirmação também é verdadeira para $N = k + 1$.

**PROBLEMA 19**

Dado um conjunto finito S de pontos no plano onde não existem quatro sobre um mesmo círculo e nem todos estão sobre uma mesma reta. Mostre que existe um círculo que passa por três desses pontos e não contém nenhum ponto de S em seu interior.

**PROBLEMA 20**

(Ibero 93) Prove que para qualquer polígono convexo de área 1, existe um paralelogramo de área dois que o contém.

**PROBLEMA 21**
(OBM 94) Considere todos os círculos cujas circunferências passam por três vértices consecutivos de um polígono convexo. Prove que um destes círculos contém todo o polígono.

**PROBLEMA 22**
(Rioplatense 97) Agustina e Santiago jogam o seguinte jogo sobre uma folha retangular:
Agustina diz um número $n$. Santiago, então marca $n$ pontos sobre a folha . Em seguida, Agustina escolhe alguns dos pontos marcados por Santiago. Santiago ganha o jogo se consegue desenhar um retângulo com lados paralelos aos da folha, que contenha todos os escolhidos por Agustina e nenhum dos restantes. Do contrário, Agustina ganha.
Qual o menor número que deve escolher Agustina para assegurar-se da vitória, independente como jogue Santiago?

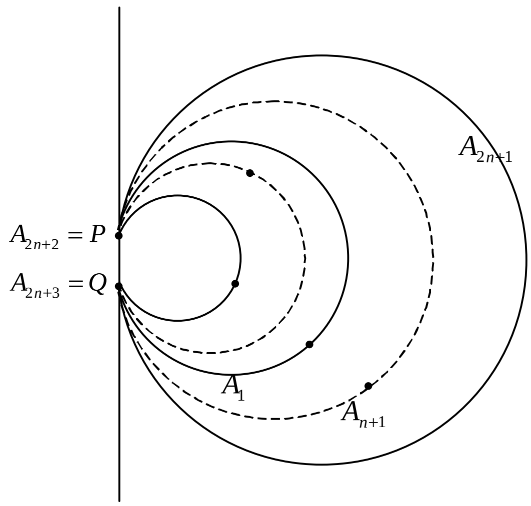
**PROBLEMA 23**
(Rússia 2000) São dados $2n+1$ segmentos em uma linha reta. Cada segmento intersecta pelo menos $n$ outros. Prove que um desses segmentos intersecta todos os outros.

**PROBLEMA 24**
(Japão 2002) É dado um conjunto $S$ de 2002 pontos no plano $xy$, não havendo dois deles com a mesma abscissa $x$ ou ordenada $y$. Para quaisquer dois desses pontos $P$ e $Q$ , considere o retângulo cuja diagonal é $PQ$ e cujos lados são paralelos aos eixos. Denotemos por $W_{PQ}$ o número de pontos de $S$ no interior desse retângulo, sem contar com $P$ e $Q$. Determine o maior valor $N$ possível que satisfaz: não importa como os pontos de $S$ estão arranjados, existe pelo menos um par $P$ e $Q$ deles com $W_{PQ} \geq N$ .

**PROBLEMA 25**
Dados $2n + 2$ pontos no plano, não havendo três colineares, prove que existem dois deles que determinam uma reta que, dos $2n$ pontos restantes, separa $n$ em um semi-plano e os outros $n$ no outro semi-plano.

**PROBLEMA 26**
(Banco IMO 93) Dados $2n+3$ pontos num plano, não havendo três colineares nem quatro concíclicos, prove que podemos escolher três deles de modo o círculo passando por estes tem $n$ dos pontos restantes no seu interior e $n$ no exterior.

**SOLUÇÃO:** Basta considerar a figura abaixo. Deixamos os detalhes para o leitor.




**PROBLEMA 27**

São dados $n$ pontos num plano. Em cada ponto médio de um segmento ligando dois desses pontos, colocamos um marcador. Prove que pelo menos $2n-3$ marcadores são utilizados.

**4. Problemas de Coberturas**

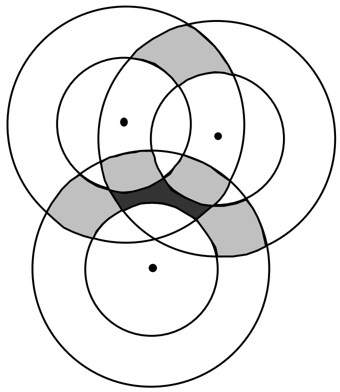
Nos problemas sobre pontos até agora, ficou claro que um pouco de geometria (sintética, analítica, trigonométrica ou utilizando o plano complexo) pode ser útil. Finalizaremos esse artigo com uma seção falando um pouco disso, em particular, fazendo coberturas com círculos.

**PROBLEMA 28**

Seja C um círculo de raio 16 e A um anel tendo raio interno 2 e raio externo 3. Agora suponha que um conjunto S de 650 pontos é selecionado dentro de C. Prove que, não importa como os pontos de S são selecionados dentro de C, o anel A pode ser colocado de modo a cobrir pelo menos 10 pontos de S.

**SOLUÇÃO:**

Queremos mostrar que existe um ponto X no plano que possui uma distância maior que 2 e menor que 3 à pelo menos 10 pontos de S. Sobre cada ponto de S coloque um anel A. Basta mostrarmos que existe um ponto X que está no interior de pelo menos 10 desses anéis. As interseções desses anéis produzem pequenas regiões (veja a figura).



Veja que existem três pequenas regiões que estão em dois anéis e uma que está em três. Somando as áreas dos três anéis contaremos três regiões duas vezes e uma três vezes. Somando a área de cada anel temos $650.(9\pi - 4\pi) = 3250\pi$ .Aumentando o raio do círculo C para 19 poderemos cobrir todos esses anéis. Se cada pequena região foi contada no máximo 9 vezes contaremos no máximo 9 vezes a área desse novo círculo , ou seja, $9.19^2\pi = 3249\pi < 3250\pi$ .

Assim existirá uma pequena região contida em pelo menos 10 anéis. Basta escolhermos um ponto *X* dessa região.

**PROBLEMA 29**

(Teste de Seleção da Romênia para a IMO – 1978) *M* é um conjunto de $3n$ pontos no plano tal que a maior distância entre quaisquer dois desses pontos é 1 unidade. Prove que:

a. Para quaisquer 4 pontos de *M*, a distância entre algum par de pontos é pelo menos $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

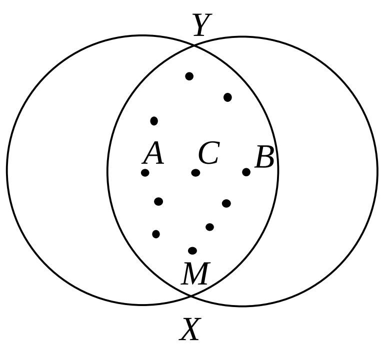
b. Algum círculo de raio $\leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cobre todo o conjunto *M*.

c. Existe algum par entre os $3n$ pontos de *M* cuja distância entre eles é no máximo $\dfrac{4}{(3\sqrt{n} - \sqrt{3})}$

**SOLUÇÃO:**

**a.** Vamos tentar arranjar um triângulo não acutângulo em *M*. Considere o fecho convexo de quatro pontos de *M*. Podemos ter um quadrilátero (degenerado quando três pontos forem colineares) ou um triângulo com um ponto de *M* em seu interior. No caso do quadrilátero como pelo menos um dos quatro ângulos internos é $\geq 90^\circ$ basta escolhermos o vértice com este ângulo e os adjacentes a ele. No caso do triângulo vamos olhar para o ponto no interior. Esse ponto olha para os três lados do triângulo com ângulos que somados resultam em $360^\circ$. Pelo menos um deles é $\geq 120^\circ$. Seja $XYZ$ um triângulo com $\angle XYZ \geq 90^\circ$. Pela lei dos cossenos temos: $y^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos XYZ \geq x^2 + z^2$. Como $y \leq 1 \Rightarrow x$ ou z $\leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

**b.** Seja $r = AB$ a maior distância entre dois pontos de *M*. Tracemos círculos de raio $r$ centrados em *A* e *B*. *M* deverá estar contido em cada um desse círculos. Então *M* deverá estar contido na região de interseção entre eles. Tracemos um círculo de raio $\frac{\sqrt{3}r}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ centrado no ponto médio *C* de *AB*. Veja que este novo círculo cobre a região de interseção.




**c.** Vamos usar a mesma idéia do problema dos anéis. Se dois ponto de *M* estão em um círculo de raio $r$ então a distância entre eles não pode ser maior ou igual a $2r$. Então nosso objetivo é mostrar que existem dois pontos de *M* dentro de um círculo de raio $\frac{2}{(3\sqrt{n} - \sqrt{3})}$

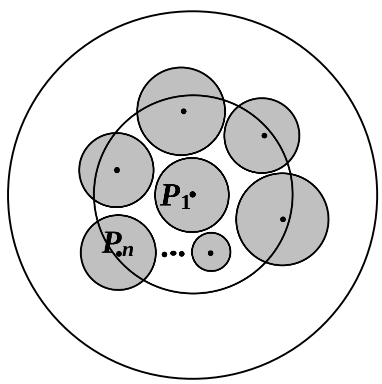
Seja *C* um círculo de raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$ que cobre *M*. Centrado em cada ponto de *M* tracemos um círculo de raio $r$. Suponha que *Z* é um ponto na interseção de dois desses círculos. Então o círculo de centro *Z* e raio $r$ cobre dois pontos de *M*(os centros dos círculos que cobriam *Z*). Como mostrar pelo menos dois desses círculos que traçamos irão se intersectar para $r = \frac{2}{(3\sqrt{n} - \sqrt{3})}$? Vamos aumentar o raio de *C* e obter um círculo *D* de raio $\frac{\sqrt{3}}{2} + r$ com mesmo centro. Todos esses círculos estarão contidos em *D*. Se a área de *D* for menor que a soma das áreas de cada círculo com certeza pelo menos dois deles terão interseção. Mas isso acontece se $3n \cdot \pi r^2 < \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + r\right)^2$. Agora basta fazermos o estudo do sinal. Como a maior raiz é $\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{n}}{2(3n-1)}$ e $3n-1>0$ se $r>\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{n}}{2(3n-1)}$ OK! $\Leftrightarrow r>\dfrac{3}{2(3\sqrt{n}-\sqrt{3})}$. (Veja que podemos melhorar um pouco a cota do problema, pois $2>\dfrac{3}{2}$).

**PROBLEMA 30**

(Ibero 97) Seja $P=\{P_1,P_2,\ldots,P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, com $P_1$ sendo o centro do círculo. Para $k=1,2,\ldots,1997$, seja $x_k$ a distância de $P_k$ ao ponto de $P$ mais próximo de $P_k$. Mostre que:

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\ldots+x_{1997}^{\ \ 2}\le 9.$$

**SOLUÇÃO:**




Note que $x_k\le 1$, para todo *k*.

Para cada ponto $P_k$, considere uma circunferência $\Gamma_k$ de centro $P_k$ e raio $\dfrac{x_k}{2}$.

Sendo assim, todos essas circunferências se tocam em no máximo 1 ponto e estão no interior de uma circunferência de centro $P_1$ e raio 3/2. Logo, $[\Gamma_1]+[\Gamma_2]+\cdots+[\Gamma_k]\le\pi\left(3/2\right)^2$ donde:

$$\pi\left(x_1/2\right)^2+\pi\left(x_2/2\right)^2+\cdots+\pi\left(x_n/2\right)^2\le\pi\left(3/2\right)^2\Rightarrow x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le 9.$$

**PROBLEMA 31**

(IMO 89) São dados *n* e *k* inteiros positivos e um conjunto *S* de *n* pontos no plano tais que

(i) não há três pontos em *S* colineares,

(ii) Para qualquer ponto *P* de *S* existem pelo menos *k* pontos de *S* eqüidistantes de *P*.

Prove que $k<\dfrac{1}{2}+\sqrt{2n}$.

**PROBLEMA 32**

(Ibero 98) Encontre o maior inteiro $n$ para o qual existem pontos $P_1, P_2, ..., P_n$ no plano e números reais $r_1, r_2, ..., r_n$ tais que a distância entre $P_i$ e $P_j$ é $r_i + r_j$.

**Referências Bibliográficas:**

[1] Revista Eureka! N°6.
[2] Ross Honsberger, Mathematical Gems Vol.I, The Dolciani Mathematical Expositions, MAA.
[3] Andreescu, Feng, Mathematical Olympiads: Olympiad problems from around the world, 1999-2000, MAA 2000.
[4] Marcin Kuczma , International Mathematical Olympiads, 1986-1999, MAA 2003.
[5] www.mathlinks.ro

# POLINÔMIOS SIMÉTRICOS

Carlos A. Gomes, UFRN, Natal – RN.

♦ Nível Avançado

Uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas algébricos de fatoração, na resolução de sistemas de equações não lineares, na resolução de algumas equações irracionais são as funções polinomiais simétricas, que apesar de seu grande poder algébrico são pouco divulgadas entre os nossos alunos. A finalidade deste breve artigo é exibir de modo sucinto como estas ferramentas podem ser úteis na resolução de alguns problemas olímpicos.

## I. Polinômios Simétricos

Um polinômio $f$, a duas variáveis $x$, $y$, é dito simétrico quando $f(x, y) = f(y, x)$ para todos os valores $x$, $y$.

**Exemplos:**

a) $\sigma_1 = x + y$ e $\sigma_2 = x \cdot y$, são evidentemente polinômios simétricos (chamados polinômios simétricos elementares).

b) Os polinômios da forma $S_n = x^n + y^n$, com $n \in \mathbb{N}$ também são simétricos. Um fato importante a ser observado é que um polinômio simétrico $f(x, y)$ pode ser representado como um polinômio em função de $\sigma_1$ e $\sigma_2$. Vejamos:

Se $S_n = x^n + y^n$, $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 2)$, então:

$S_n = x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}) = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2}$ $(n \geq 2)$

Mas,

$S_0 = x^0 + y^0 = 1 + 1 = 2$

$S_1 = x^1 + y^1 = x + y = \sigma_1$

Assim temos que:

$S_0 = 2$

$S_1 = \sigma_1$

$S_2 = \sigma_1 \cdot S_1 - \sigma_2 \cdot S_0 = \sigma_1 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 \cdot 2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

$S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2 \cdot \sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \cdot \sigma_2$

E daí usando a lei de recorrência $S_n = \sigma_1 S_{n-1} - \sigma_2 S_{n-2}$ $(n \geq 2)$ podemos determinar $S_n$ em função de $\sigma_1$ e $\sigma_2$ para qualquer número natural $n$.

Agora para garantirmos a afirmação anterior que todo polinômio simétrico $f(x, y)$ pode ser representado como um polinômio em $\sigma_1$ e $\sigma_2$ observemos o seguinte fato:

Num polinômio simétrico $f(x, y)$ para os termos da forma $\boldsymbol{a \,.\, x^K \,.\, y^K}$ não temos nenhum problema pois $\boldsymbol{a \cdot x^K \cdot y^K = a(x \cdot y)^K = a \cdot \sigma_2{}^K}$. Agora com os termos da forma $\boldsymbol{b \cdot x^i \cdot y^K}$, com $i < k$ devemos observar o seguinte fato: Como, por hipótese, $f(x, y)$ é simétrico se $\boldsymbol{b \cdot x^i \cdot y^k}$, com $i < k$ estiver presente em $f(x, y)$ temos que $\boldsymbol{b \cdot x^k \cdot y^i}$ também deve estar presente em $f(x, y)$, visto que deve ser satisfeita a condição $f(x, y) = f(y, x)$. Assim se agruparmos os termos $\boldsymbol{b \cdot x^i \cdot y^k + b \cdot x^k \cdot y^i}$
($i < k$) temos que:

$$\boldsymbol{b \cdot x^i \cdot y^k + b \cdot x^k \cdot y^i = b \cdot x^i \cdot y^i\,(x^{k-i} + y^{k-i}) = b \cdot \sigma_2{}^i \cdot S_{k-i}}\,,$$

mas como já mostramos anteriormente $S_{k-i}$ pode ser escrito como um polinômio em $\sigma_1$ e $\sigma_2$, pois $k - i \in \mathbb{N}$, visto que $i < k$.

**II. Exemplos Resolvidos**

**01.** (Funções simétricas elementares a 3 variáveis)

Definido:
$\sigma_1 = x + y + z$
$\sigma_2 = xy + xz + yz$
$\sigma_3 = x \cdot y \cdot z$
$S_n = x^n + y^n + z^n$, com $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$

Mostre que:
a) $S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3}$ ($n \geq 3$, com $n \in \mathbb{N}$)
b) $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

Resolução:
Observe inicialmente que:

$$x^n + y^n + z^n = (x + y + z)\,(x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}) - (xy + xz + yz)\,(x^{n-2} + y^{n-2} + z^{n-2}) + xyz\,(x^{n-3} + y^{n-3} + z^{n-3})$$

e daí temos que:
$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3}$ ($n \geq 3$, com $n \in \mathbb{N}$)

Agora temos que:

$S_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 1 + 1 + 1 = 3$
$S_1 = x + y + z = \sigma_1$
$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2\,(xy + xz + yz) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$
Agora fazendo $n = 3$ temos na lei de recorrência $S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3}$ temos que:
$S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_3 \cdot S_0 = \sigma_1\,(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2 \cdot \sigma_1 + \sigma_3 \cdot 3$
$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \cdot \sigma_2 + 3\sigma_3$

**02.** a) Fatore $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

**Resolução:**
Essa velha e manjada questão continua ainda hoje pegando alguns bons professores e alunos. A sua solução pelos métodos tradicionais envolve uma boa dose de atenção e de paciência para aplicar velhos "truques" de fatoração, por outro lado ela é imediata usando os polinômios simétricos. Vejamos:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = S_3 - 3 \cdot \sigma_3$$

Mas de acordo com a questão anterior $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ e daí temos que $S_3 - 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$. Assim:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= S_3 - 3\sigma_3 = \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \\ &= \sigma_1\,(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \\ &= [(x + y + z)^2 - 3\,(xy + xz + yz)] \\ &= (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \end{aligned}$$

**Obs**. (para os mais curiosos): Na RPM 41, pág.38 existe uma bela resolução desse problema usando um determinante.

b) Usando a fatoração obtida em ($a$), verifique a famosa desigualdade das médias aritmética e geométrica. Se $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ então $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$ e a igualdade ocorre, se, e somente se, $a = b = c$.

De fato, em ($a$) verificamos que
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$
Vamos mostrar inicialmente que se $x, y, z$ são números reais positivos então:

$(x + y + z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xy - yz) \geq 0$

De fato,

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz + yz = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2zy)$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2)$$
$$= \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2] \geq 0$$ (Soma de quadrados)

Ora, como estamos supondo $x$, $y$, $z$ reais positivos temos que $x + y + z \geq 0$ e daí $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$ (pois é o produto de fatores $\geq 0$).

Assim temos que:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$$

e daí

$$3xyz \leq x^3 + y^3 + z^3 \Rightarrow xyz \leq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$$

fazendo $x^3 = a$, $y^3 = b$ e $z^3 = c$ temos que:

$$\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

e daí

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

Com a igualdade ocorrendo se e somente se $a = b = c$, pois em $(x + y + z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$ a igualdade ocorre apenas quando $x = y = z$, visto que $x + y + z > 0$, uma vez que $x$, $y$, $z$ são números reais positivos e além disso,

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2] = 0 \Leftrightarrow x = y = z.$$

**03.** Fatore $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$

**Resolução:**

$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = \sigma_1^3 - S_3$

Mas, no exemplo anterior vimos que $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ e daí

$$
\begin{aligned}
(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) &= \sigma_1^3 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \\
&= 3 \cdot (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) \\
&= 3 \cdot [(x + y + z)(xy + xz + yz) - xyz] \\
&= 3 \cdot (x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + y^2z + xyz + xz^2 + yz^2 - xyz) \\
&= 3 \cdot [xy(x + y) + xz(x + y) + yz(y + z) + xz(y + z)] \\
&= 3 \cdot [(x + y)(xy + xz) + (y + z)(yz + xz)] \\
&= 3 \cdot [(x + y) . x(y + z) + (y + z) . z(x + y)] \\
&= 3 \cdot (x + y)(y + z)(x + z)
\end{aligned}
$$

**04.** Se $x_1$ e $x_2$ são as raízes da equação $x^2 - 6x + 1 = 0$ determine o valor de $x_1^5 + x_2^5$.

**Resolução:**
Fazendo $S_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in \mathbb{N}$, queremos determinar $S_5 = x_1^5 + x_2^5$
Temos que:
$\sigma_1 = x_1 + x_2 = 6$
$\sigma_2 = x_1 \cdot x_2 = 1$
$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$
$S_1 = x_1 + x_2 = 6$
$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} = 6\, S_{n-1} - S_{n-2}$

e daí

$S_2 = 6 \cdot S_1 - S_0 = 6 \cdot 6 - 2 = 34$
$S_3 = 6 \cdot S_2 - S_1 = 6 \cdot 34 - 6 = 198$
$S_4 = 6 \cdot S_3 - S_2 = 6 \cdot 198 - 34 = 1154$
$S_5 = 6 \cdot S_4 - S_3 = 6 \cdot 1154 - 198 = 6726$
Assim $x_1^5 + x_2^5 = 6726$

**05.** Determine todas as soluções reais do sistema

$$
\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}
$$

De acordo com o sistema acima temos que:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ S_3 + \sigma_3 = S_4 + 1 \end{cases}, \text{ onde } S_n = x^n + y^n + z^n, n \in \mathbb{N}$$

Mas, $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3$ e $S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1.\ \sigma_3$ (verifique isto!) e daí

$S_3 + \sigma_3 = S_4 + 1 \Rightarrow \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + \sigma_3 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 1$

Como $\sigma_1 = 1$ temos que:

$1 - 3\sigma_2 + 4\sigma_3 = 1 - 4\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_3 + 1 \Rightarrow 2\sigma_2^2 - \sigma_2 + 1 = 0$

Como, $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$, concluímos que existem raízes reais.

Uma outra aplicação interessante dos polinômios simétricos pode ser encontrada na resolução de algumas equações irracionais. Vejamos:

**06.** Determine todas as raízes reais da equação abaixo:

$$\sqrt[4]{272 - x} + \sqrt[4]{x} = 6$$

**Resolução:**

Fazendo $\sqrt[4]{x} = y$ e $\sqrt[4]{272 - x} = z$ temos que

$$x = y^4 \text{ e } 272 - x = z^4 \Rightarrow \begin{cases} y + z = 6 \\ y^4 + z^4 = 272 \end{cases}$$

e agora lembrando que: $\sigma_1 = y + z$ e $\sigma_2 = y \cdot z$ e $S_n = y^n + z^n$, com $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 6 \\ S_4 = 272 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 6 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2.\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 272 \end{cases}$$

Logo, $6^4 - 4 \cdot 6^2 \cdot \sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 272 \Rightarrow \sigma_2^2 - 72\sigma_2 + 512 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = 64$ ou $\sigma_2 = 8$

Assim, se $\sigma_2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} y + z = 6 \\ y \cdot z = 64 \end{cases} \Rightarrow$ Não existem soluções reais.

Por outro lado, se $\sigma_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} y + z = 6 \\ y \cdot z = 8 \end{cases} \Rightarrow y = 2$ e $z = 4$ ou $z = 2$ e $y = 4$

Assim concluímos que:

$$y = 2 \Rightarrow x = 16$$
$$y = 4 \Rightarrow x = 256$$

Logo as raízes reais da equação são 16 e 256.

**III. Problemas:**

**01.** Se $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são as raízes da equação $x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$. Determine o valor de $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$

**02.** Mostre que se o sistema $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \\ x^3 + y^3 = c \end{cases}$ tem solução, então $a^3 - 3ab + 2c = 0$

**03.** $x$, $y$, $z$ são números reais tais que $x + y + z = 5$ e $yz + zx + xy = 3$. Verifique que $-1 \le z \le \frac{13}{3}$.

**04.** Se $x + y + z = 0$, verifique que, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ vale a relação:

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} = xyz(x^n + y^n + z^n) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1})$$

**05.** Determine as raízes reais da equação $\sqrt[5]{33 - x} + \sqrt[5]{x} = 3$.

**06.** Verifique que:

$$(x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (x + z - y)^3 - (x + y - z)^3 = 24xyz.$$

**07.** Dados $a$, $b$ e $c$ números reais positivos tais que $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 0$, determine o valor de $(\log_a b)^3 + (\log_b c)^3 + (\log_c a)^3$.

**08.** Se $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são números complexos tais que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$ e $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 7$, determine o valor de $\alpha^{21} + \beta^{21} + \gamma^{21}$.

**Referências:**

[1] Barbeau, E. J., Polynomials – Problems books in Mathematics – Springer Verlag.
[2] Engel, Arthur , Problem-Solving Strategies – Springer Verlag.
[3] www.obm.org.br
[4] Mathematical Excalibur.

# OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO

A partir desse número a EUREKA! volta a apresentar problemas de olimpíadas de vários países do mundo. Como antes, esperamos contar com a colaboração dos leitores para a apresentação das soluções dos problemas propostos. Aos leitores que se interessarem pela solução de algum problema particular, pedimos contatar à OBM, através de carta ou e-mail. Repassada a nós a mensagem, teremos o maior prazer de apresentar as soluções solicitadas no número subsequente da EUREKA! Bom divertimento!

*Antonio Caminha*
*Antonio Luiz Santos*
*Bruno Holanda*
*Samuel Barbosa*

**211. (Baltic Way – 2004)** Uma seqüência $a_1$, $a_2$, ... de números reais não-negativos satisfaz, para $n = 1, 2, ...$, as seguintes condições:

($a$) $a_n + a_{2n} \geq 3n$.
($b$) $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n(n+1)}$.
($i$) Prove que $a_n \geq n$ para todo $n = 1, 2, ...$
($ii$) Dê exemplo de uma tal seqüência.

**212. (Baltic Way – 2004)** Seja $P$ um polinômio com coeficientes não-negativos. Prove que se $P(1/x)P(x) \geq 1$ para $x = 1$, então tal desigualdade se verifica para todo real positivo $x$.

**213. (Baltic Way – 2004)** Ache todos os conjuntos $X$, consistindo de ao menos dois inteiros positivos, tais que para todos $m, n \in X$, com $n > m$, exista um elemento $k$ de $X$ tal que $n = mk^2$.

**214. (Rússia – 2004)** São dados um natural $n > 3$ e reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ cujo produto é 1. Prove a desigualdade

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1.$$

**215. (Rússia – 2004)** Uma seqüência $a_1$, $a_2$, ... de números racionais não-negativos é tal que $a_m + a_n = a_{mn}$ para todos $m$, $n$ naturais. Prove que os termos da seqüência não podem ser todos distintos.

**216. (Rússia – 2004)** Sejam $I_A$ e $I_B$ os centros das circunferências ex-inscritas a um triângulo $ABC$ que tangenciam os lados $BC$ e $AC$, respectivamente. Seja ainda $P$ um ponto sobre a circunferência circunscrita de $ABC$. Prove que o ponto médio do segmento que une os circuncentros dos triângulos $I_ACP$ e $I_BCP$ coincide com o circuncentro de $ABC$.

**217. (Putnam – 2005)** Calcule o valor da integral $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx$.

**218. (Putnam – 2005)** Encontre todas as funções diferenciáveis $f$: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ para as quais exista um real positivo $a$ tal que $f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}$ para todo real positivo $x$.

**219. (Putnam – 2005)** Seja $S_n$ o conjunto de todas as permutações de 1, 2, ..., $n$. Para $\pi \in S_n$, seja $\sigma(\pi) = 1$ se $\pi$ for uma permutação par e $\sigma(\pi) = -1$ se $\pi$ for uma permutação ímpar. Denote ainda por $v(\pi)$ o número de pontos fixos de $\pi$. Prove que

$$\sum_{\pi \in S_n} \frac{\sigma(\pi)}{v(\pi)+1} = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}.$$

**220. (Moldávia – 2006)** Seja $a$ e $b$ os catetos de um triângulo retângulo, $c$ sua hipotenusa e $h$ a altura relativa à mesma. Encontre o maior valor possível de $\frac{c+h}{a+b}$.

**221. (Moldávia – 2006)** Seja $n > 1$ um inteiro positivo e $M = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Para $a$ inteiro não-nulo, nós definimos a função $f_a$: $M \to M$ tal que $f_a(x)$ é o resto da divisão de $ax$ por $n$. Encontre uma condição necessária e suficiente para que $f_a$ seja uma bijeção. Se $f_a$ for uma bijeção e $n$ for um número primo, prove que $a^{n(n-1)} - 1$ é divisível por $n^2$.

**222. (Moldávia – 2006)** O quadrilátero convexo $ABCD$ é inscritível. As tangentes a sua circunferência circunscrita em $A$ e $C$ se intersectam em $P$, tal que $P$ não está sobre a reta $BD$ e $PA^2 = PB \times PD$. Prove que a reta $BD$ passa pelo ponto médio do segmento $AC$.

**223. (Bielorússia – 2005)** Seja $H$ o ponto de interseção das alturas $BB_1$ e $CC_1$ do triângulo acutângulo $ABC$. Seja $\ell$ uma reta passando por $A$, tal que $\ell \perp AC$. Prove que as retas $BC$, $B_1C_1$ e $\ell$ possuem um ponto em comum se e somente se $H$ for o ponto médio de $BB_1$.

**224. (Bielorússia – 2005)** Ache todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n),$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

**225. (Bielorússia – 2005)** Prove que

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right),$$

Para quaisquer reais positivos $a$ e $b$.

**226. (Bulgária – 2005)** Ache todos os naturais de quatro algarismos $m$, menores que 2005 e para os quais existe um natural $n < m$ tal que $m - n$ possui no máximo 3 divisores e $mn$ seja um quadrado perfeito.

**227. (Bulgária – 2005)** Ivo escreve todos os inteiros de 1 a 100 (inclusive) em cartas e dá algumas delas para Iana. Sabe-se que para quaisquer duas destas cartas, uma de Ivo e outra de Iana, a soma dos números não está com Ivo e o produto não está com Iana. Determine o número de cartas de Iana sabendo que a carta 13 está com Ivo.

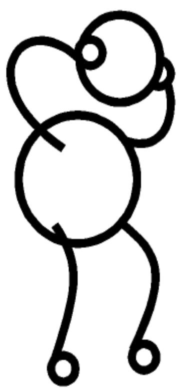
**228. (Bulgária – 2005)** Ache todas as triplas de inteiros positivos $(x, y, z)$ tais que

$$\sqrt{\frac{2005}{x+y}} + \sqrt{\frac{2005}{y+z}} + \sqrt{\frac{2005}{z+x}},$$

também seja um inteiro.

**229. (Eslovênia – 2005)** Encontre todos os números primos $p$ para os quais o número $p^2 + 11$ tem menos que 11 divisores.

**230. (Eslovênia – 2005)** Denote por $I$ o incentro do triângulo $ABC$. Sabe-se que $AC + AI = BC$. Encontre a razão entre as medidas do ângulos $\angle BAC$ e $\angle CBA$.



## Você sabia…

Que $4847\cdot 2^{3321063} + 1$, $27653\cdot 2^{9167433} + 1$ e $19249\cdot 2^{13018586} + 1$ são primos? Esses foram o oitavo, o nono e o décimo primos descobertos pelo projeto "seventeen or bust", sendo seus descobridores Richard Hassler, Derek Gordon e Konstantin Agafonov, respectivamente. Isso mostra que 4847, 27653 e 19249 não são números de Sierpinski (i.e., ímpares $k$ tais que $k\cdot 2^n + 1$ é composto para todo $n \in \mathbb{N}$; veja a Eureka! 18, pág. 61), reduzindo para 7 o número de naturais menores que 78557 (que é o menor número de Sierpinski conhecido), sobre os quais não se sabe se são ou não números de Sierpinski: 10223, 21181, 22699, 24737, 33661, 55459 e 67607. Veja www.seventeenorbust.com para mais informações (inclusive sobre como participar do projeto).

# SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

*Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.*

**108)** Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos finitos. Para $1 \le k \le n,$ seja $S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k} \right|$, a soma dos números de elementos das interseções de *k* dos conjuntos $A_i$. Prove que:

a) O número de elementos que pertencem a exatamente *r* dos conjuntos $A_i$ é $\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k$, para $1 \le r \le n.$

b) O número de elementos que pertencem a pelo menos *r* dos conjuntos $A_i$ é $\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k$, para $1 \le r \le n.$

### SOLUÇÃO ADAPTADA DA SOLUÇÃO DE ANDERSON TORRES (SÃO PAULO - SP)

a) Sejam $I = \{1, 2, ..., n\}$ e $P \subset I$ um conjunto fixo com *r* elementos. O total de elementos que pertencem a todos os $A_i$ com com $i \in P$ e que não pertencem a nenhum outro $A_j$ com $j \in I \setminus P$ é exatamente o total de elementos do conjunto $\left( \bigcap_{i \in P} A_i \right)$ que não pertencem a $\left( \bigcup_{j \in I \setminus P} \left( A_j \cap \left( \bigcap_{i \in P} A_i \right) \right) \right)$.

Podemos usar Inclusão-Exclusão:

$$\left| \bigcap_{i \in P} A_i \right| - \left| \bigcup_{j \in I - P} \left( A_j \cap \left( \bigcap_{i \in P} A_i \right) \right) \right| =$$

$$\left| \bigcap_{i \in P} A_i \right| - \sum_{\substack{K \supset P \\ |K| = r+1}} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| + \sum_{\substack{K \supset P \\ |K| = r+2}} \left| \bigcap_{i \in k} A_i \right| ... = \sum_{K \supset P} (-1)^{|K| - |P|} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|$$

Agora, variando o conjunto *P*:

$$\sum_{|P| = r} \sum_{K \supset P} (-1)^{|K| - |P|} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| = \sum_{\substack{K \subset I \\ |K| \ge r}} \sum_{\substack{P \subset K \\ |P| = r}} (-1)^{|K| - |P|} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|$$

O conjunto de índices $P \subset K$ com $|P| = r$ (onde $|K| = k$ ) pode ser escolhido de $\binom{k}{r}$ maneiras para cada *K*, e já que $\left|\bigcap_{i\in K} A_i\right|$ não depende de *P*, a soma acima vale

$$\sum_{r\le k\le n} (-1)^{k-r}\binom{k}{r}\left(\sum_{\substack{K\subset I\\ |K|=k}}\left|\bigcap_{i\in K} A_i\right|\right) = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k.$$

b) Somando a expressão $\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}S_k$ de $m = r$ até *n*, e usando a identidade

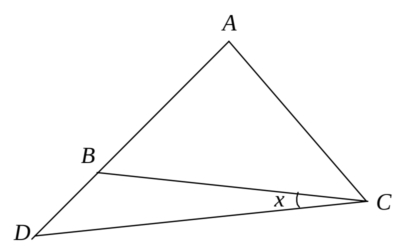
$$\sum_{m=r}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m} = \sum_{j=0}^{k-r}(-1)^{j}\binom{k}{j} = (-1)^{k-r}\binom{k-1}{k-r} = (-1)^{k-r}\binom{k-r}{r-1},$$

que pode ser facilmente provada por indução (ver nota), o resultado segue.
Nota: Para provar por indução a identidade

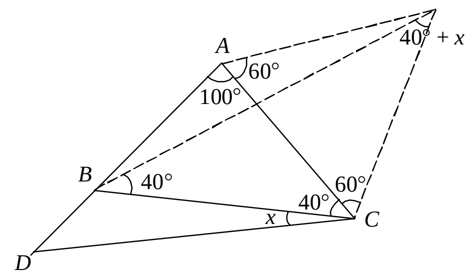
$\sum_{j=0}^{r}(-1)^{j}\binom{k}{j} = (-1)^{r}\binom{k-1}{r}$, $0 \le r \le k$, basta ver que isto vale para $r = 0$ e, se $r < k$, $\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{j}\binom{k}{j} = (-1)^{r+1}\binom{k}{r+1} + \sum_{j=0}^{r}(-1)^{j}\binom{k}{j} =$

$$= (-1)^{r+1}\binom{k}{r+1} + (-1)^{r}\binom{k-1}{r} = (-1)^{r+1}\left(\binom{k}{r+1} - \binom{k-1}{r}\right) = (-1)^{r+1}\binom{k-1}{r+1}.$$

**109)** Na figura abaixo, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $B\hat{A}C = 100°$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$. Mostre que $x = B\hat{C}D$ é racional quando expresso em graus.



**SOLUÇÃO DE GIBRAN MEDEIROS**




Construimos o triângulo eqüilátero *ACE*. Os triângulos *BCE* e *ACD* são congruentes, pois *CE* = *AC* , $\angle BCE = \angle DAC = 100°$ e *BC* = *AD*. Logo $\angle BCE = 40° + x$. Como o triângulo *ABE* é isósceles, temos $\angle AEB = \angle ABE = 10°$ e, portanto $60° - (40° + x) = 10°,$ donde $x = 10°$.

Continuamos aguardando as soluções dos seguintes problemas propostos:

**110)** Um conjunto finito de inteiros positivos é chamado de *Conjunto DS* se cada elemento divide a soma dos elementos do conjunto.
Prove que todo conjunto finito de inteiros positivos é subconjunto de algum conjunto *DS*.

**111)** Prove que existem infinitos múltiplos de 7 na seqüência $(a_n)$ abaixo:
$a_1 = 1999,\ a_n = a_{n-1} + p(n), \forall n \geq 2$ , onde $p(n)$ é o menor primo que divide $n$.

**112)** a) Determine todos os inteiros positivos $n$ tais que existe uma matriz $n \times n$ com todas as entradas pertencentes a { –1, 0, 1} tal que os $2n$ números obtidos como somas dos elementos de suas linhas e de suas colunas são todos distintos.
Nota: Como explicado na página 72 da Eureka! No. 24, o item b) do problema 112 foi anulado.

**Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:**

| | |
|---|---|
| André Araújo | Fortaleza – CE |
| Carlos Alberto da Silva Victor | Nilópolis – RJ |
| Diego Andrés de Barros | Recife – PE |
| Dymitri Cardoso Leão | Recife – PE |
| Fábio Soares Piauí | Recife – PE |
| Janderson Alencar | Recife – PE |
| Mardônio Luz do Amaral | Recife – PE |
| Michel Angelucci | Ibitinga – SP |
| Renan e Gabriel Lima Novais | Niterói – RJ |
| Samuel Liló Abdalla | Sorocaba – SP |

# PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para próximos números.*

**113)** $a_1, a_2, a_3, \ldots$ formam uma seqüência de inteiros positivos menores que 2007 tais que $\dfrac{a_m + a_n}{a_{m+n}}$ é inteiro, para quaisquer inteiros positivos *m*, *n*.
Prove que a seqüência $(a_n)$ é periódica a partir de um certo ponto.

**114)** Sabendo que $sen\ x + sen\ y + sen\ z + sen\ w = 0$ e
$\cos x + \cos\ y + \cos\ z + \cos\ w = 0,$ mostre que
$sen^{2003} x + sen^{2003} y + sen^{2003} z + sen^{2003} w = 0.$

**115)** Suponha que *ABC* é um triângulo com lados inteiros *a*, *b* e *c* com $B\widehat{C}A = 60°$ e $mdc(a,b) = mdc(a,c) = mdc(b,c) = 1.$ Prove que $c \equiv 1 (\bmod 6)$.

**116)** Seja *ABC* um triângulo e sejam *X*, *Y* e *Z* as reflexões de *A*, *B* e *C* em relação às retas *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente. Prove que *x*, *y* e *z* são colineares se e somente se $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -3/8$.

**117)** Sejam *r* e *s* duas retas reversas (i.e., não contidas num mesmo plano) e *A*, *B*, *C*, *D*, $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}$ pontos tais que $A, B, \widetilde{A}, \widetilde{B} \in r, C, D, \widetilde{C}, \widetilde{D} \in s$, $AB = \widetilde{A}\widetilde{B}$ e $CD = \widetilde{C}\widetilde{D}.$ Prove que os tetraedros *ABCD* e $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D}$ têm o mesmo volume.

**118)** Considere a seqüência $(a_n)_{n \geq 1}$ dada por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{2 + 9a_n}{3 + 9a_n}, \forall n \geq 1.$

Prove que $(a_n)$ converge e calcule a seu limite.

**Problema 113 proposto por Anderson Torres (São Carlos – SP); Problema 114 proposto por Carlos A. Gomes (Natal – RN); Problema 115 proposto por Gabriel Ponce (enviado por e-mail); Problema 116 e 117 propostos por Wilson Carlos da Silva Ramos (Belém – PA); Problema 118 proposto por Sidnei Belcides Avelar (Macapá – AP)**

# AGENDA OLÍMPICA

## XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

**NÍVEIS 1, 2 e 3**
**Primeira Fase –** Sábado, 16 de junho de 2007
**Segunda Fase –** Sábado, 15 de setembro de 2007
**Terceira Fase –** Sábado, 27 de outubro de 2007 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 28 de outubro de 2007 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

**NÍVEL UNIVERSITÁRIO**
**Primeira Fase –** Sábado, 15 de setembro de 2007
**Segunda Fase –** Sábado, 27 e Domingo, 28 de outubro de 2007

♦

**XIII OLIMPÍADA DE MAIO**
12 de maio de 2007

♦

**XVIII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL**
Uruguai
12 a 17 de junho de 2007

♦

**XLVIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA**
19 a 31 de julho de 2007
Vietnã

♦

**XIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA**
3 a 9 de agosto de 2007
Blagoevgrad, Bulgária

♦

**XXII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA**
6 a 16 de setembro de 2007
Portugal

♦

**X OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA**

♦ ♦ ♦

# COORDENADORES REGIONAIS

| | | |
|---|---|---|
| **Alberto Hassen Raad** | (UFJF) | Juiz de Fora – MG |
| **Américo López Gálvez** | (USP) | Ribeirão Preto – SP |
| **Amarísio da Silva Araújo** | (UFV) | Viçosa – MG |
| **Andreia Goldani** | FACOS | Osório – RS |
| **Antonio Carlos Nogueira** | (UFU) | Uberlândia – MG |
| **Ali Tahzibi** | (USP) | São Carlos – SP |
| **Benedito Tadeu Vasconcelos Freire** | (UFRN) | Natal – RN |
| **Carlos Alexandre Ribeiro Martins** | (Univ. Tec. Fed. de Paraná) | Pato Branco - PR |
| **Carmen Vieira Mathias** | (UNIFRA) | Santa María – RS |
| **Claus Haetinger** | (UNIVATES) | Lajeado – RS |
| **Cleonor Crescêncio das Neves** | (UTAM) | Manaus – AM |
| **Cláudio de Lima Vidal** | (UNESP) | S.J. do Rio Preto – SP |
| **Edson Roberto Abe** | (Colégio Objetivo de Campinas) | Campinas – SP |
| **Élio Mega** | (Colégio Etapa) | São Paulo – SP |
| **Eudes Antonio da Costa** | (Univ. Federal do Tocantins) | Arraias – TO |
| **Fábio Brochero Martínez** | (UFMG) | Belo Horizonte – MG |
| **Florêncio Ferreira Guimarães Filho** | (UFES) | Vitória – ES |
| **Genildo Alves Marinho** | (Centro Educacional Leonardo Da Vinci) | Taguatingua – DF |
| **Ivanilde Fernandes Saad** | (UC. Dom Bosco) | Campo Grande– MS |
| **Jacqueline Rojas Arancibia** | (UFPB)) | João Pessoa – PB |
| **Janice T. Reichert** | (UNOCHAPECÓ) | Chapecó – SC |
| **João Benício de Melo Neto** | (UFPI) | Teresina – PI |
| **João Francisco Melo Libonati** | (Grupo Educacional Ideal) | Belém – PA |
| **José Cloves Saraiva** | (UFMA) | São Luis – MA |
| **José Luiz Rosas Pinho** | (UFSC) | Florianópolis – SC |
| **José Vieira Alves** | (UFPB) | Campina Grande – PB |
| **José William Costa** | (Instituto Pueri Domus) | Santo André – SP |
| **Krerley Oliveira** | (UFAL) | Maceió – AL |
| **Licio Hernandes Bezerra** | (UFSC) | Florianópolis – SC |
| **Luzinalva Miranda de Amorim** | (UFBA) | Salvador – BA |
| **Mário Rocha Retamoso** | (UFRG) | Rio Grande – RS |
| **Marcelo Rufino de Oliveira** | (Grupo Educacional Ideal) | Belém – PA |
| **Marcelo Mendes** | (Colégio Farias Brito, Pré-vestibular) | Fortaleza – CE |
| **Newman Simões** | (Cursinho CLQ Objetivo) | Piracicaba – SP |
| **Nivaldo Costa Muniz** | (UFMA) | São Luis – MA |
| **Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro** | (Colégio Anglo) | Atibaia – SP |
| **Ronaldo Alves Garcia** | (UFGO) | Goiânia – GO |
| **Rogério da Silva Ignácio** | (Col. Aplic. da UFPE) | Recife – PE |
| **Reginaldo de Lima Pereira** | (Escola Técnica Federal de Roraima) | Boa Vista – RR |
| **Reinaldo Gen Ichiro Arakaki** | (UNIFESP) | SJ dos Campos – SP |
| **Ricardo Amorim** | (Centro Educacional Logos) | Nova Iguaçu – RJ |
| **Sérgio Cláudio Ramos** | (IM-UFRGS) | Porto Alegre – RS |
| **Seme Gebara Neto** | (UFMG) | Belo Horizonte – MG |
| **Tadeu Ferreira Gomes** | (UEBA) | Juazeiro – BA |
| **Tomás Menéndez Rodrigues** | (U. Federal de Rondônia) | Porto Velho – RO |
| **Valdenberg Araújo da Silva** | (U. Federal de Sergipe) | São Cristovão – SE |
| **Valdeni Soliani Franco** | (U. Estadual de Maringá) | Maringá – PR |
| **Vânia Cristina Silva Rodrigues** | (U. Metodista de SP) | S.B. do Campo – SP |
| **Wagner Pereira Lopes** | (CEFET – GO) | Jataí – GO |
| **William Beline** | (UNESPAR/FECILCAM) | Campo Mourão – PR |