Equações e Variáveis

Bruno Holanda*

7 de novembro de 2011

Resumo

Apartir de agora, vamos introduzir equações para resolver problemas diversos. Também vamos fazer uso de propriedades simples de divisibilidade nas argumentações lógicas de alguns dos problemas presentes nesta lista. É importante lembrar que os problemas propostos aqui serão bem mais elaborados dos que os presentes nas aulas anteriores. Por isso, sua dedicação deverá ser ainda maior.

1 Introdução

Problema 1. Em um hotel para cães e gatos, 10% dos cães acham que são gatos e 10% dos gatos acham que são cães. Verificou-se também que 20% dos animais acham que são gatos. Se no hotel existem 10 gatos, quantos são os cães?

Em alguns casos é necessário o uso de mais de uma variável para resolver um problema. Isto acontece pois existe mais de uma informação "secreta" no enunciado, e o uso de letras se mostra uma forma inteligente e fácil de trabalhar com valores desconhecidos. A seguir vamos resolver um problema que apareceu em uma olimpíada russa de 1995.

Problema 2. (Rússia 1995) Um trêm deixa Moscou às x horas e y minutos, chegando em Saratov às y horas e z minutos. O tempo da viagem foi de z horas e x minutos. Ache todos os possíveis valores para x.

Solução. Das condições do problema, temos que:

$$(60y + z) - (60x + y) = 60z + x$$

$$\Rightarrow 60(y - x - z) = x + y - z.$$

Com isso, podemos garantir que $x+y-z$ é um múltiplo de 60. Por outro lado, como $0 \leq x, y, z \leq 23$, o único valor possível para $x + y - z$ é 0. Ou seja, $x + y = z$. Além disso, na equação inicial temos que $60(y-x-z) = 0$. Daí, $y = x+z$. Logo, o único valor de x que garante essas igualdades

*Outros materiais como este podem ser encontrados em http://brunolholanda.wordpress.com/

é $x = 0$.

É importante perceber que no exemplo anterior que apenas o uso de letras não seria o suficiente para resolver o problema. O fundamental para resolver as equações acima era o significado das letras: números inteiros entre 0 e 60. Sem esta restrição o problema apresentaria infinitas soluções. Então fica a dica: nunca se **esqueça do signigficado das variáveis que estiver usando**, se são dígitos, números inteiros, racionais ou seja qual for a propriedade. Lembre-se que esta propriedade terá papel importante na solução do problema.

Organizar as informações também é útil na maioria dos problemas, como veremos no exemplo a seguir.

Problema 3. Paulo possui 13 caixas vermelhas e cada uma delas está vazia ou contém 7 caixas azuis. Cada caixa azul está vazia ou contém 7 caixas verdes. Se ele possui 145 caixas vazias, quantas caixas ele possui no total?

Solução. Vamos montar uma tabela que ajudará na solução do problema

	Vermelhas	Azuis	Verdes
Cheias	x	y	0
Vazias	$13 - x$	$7x - y$	$7y$
Total	13	$7x$	$7y$

Suponha que o número de caixas vermelhas cheias seja x e que o número de caixas azuis cheias seja y. Portanto, temos $7x$ caixas azuis e $7y$ caixas verdes. Note também que todas as caixas verdes estão vazias. Dessa forma, o total de caixas vazias é $(13-x)+(7x-y)+7y = 145$. Assim, podemos concluir que $x + y = 22$. Como o número total de caixas é $13 + 7(x + y)$, a resposta correta será $13 + 7 \times 22 = 167$.

2 Problemas Propostos

Problema 4. Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. Samila, a irmã de Samuel, possui o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos (homens e mulheres) possui o pai de Samuel e Samila?

Problema 5. É possível cortar um tabuleiro 39×55 em vários retângulos 5×11?

Problema 6. No fim de 1994, Neto tinha metade da idade de seu avô. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completou em 2006?

Problema 7. Um professor propõe 80 problemas a um aluno, informando que ele ganha 5 pontos ao acertar cada problema corretamente e perde 3 pontos caso não resolva o problema. No final, o aluno tinha 8 pontos. Quantos problemas ele resolveu corretamente?

Problema 8. (Leningrado 1987) Na ilha de Anchúria existem quatro tipos de notas: 1\$, 10\$, 100\$ e 1000\$. Podemos obter 1\$ milhão com exatamente 500.000 notas?

Problema 9. Você tem uma lista de números reais, cuja soma é 40. Se você trocar todo número x da lista por $1 - x$, a soma dos novos números será 20. Agora, se você trocar todo número x por $1 + x$, qual será o valor da soma?

Problema 10. (Eslovênia 1992) Complete a tabela abaixo de modo que:

i. A soma de quaisquer três vizinhos seja a mesma.

ii. A soma total dos números seja 171.

			15				13					

Problema 11. Trabalhando juntos Alvo e Ivo, pintam uma casa em três dias; Ivo e Eva pintam a mesma casa em quatro dias; Alvo e Eva em seis dias. Se os três trabalharem juntos, quantos em quantos dias pintarão a casa?

Problema 12. (Rioplatense 1997) Em cada casa de um tabuleiro 4×4 é colocado um número secreto. Sabe-se que a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é 1. Com essa informação é possível determinar a soma dos números escritos nos quatro cantos? E a soma dos quatro números escritos no centro? Se for, quais são essas somas?

Problema 13. (Leningrado 1988) Uma pilha com 1001 pedras está sobre uma mesa. Um jogo consiste em escolher uma pilha sobre a mesa contendo mais de uma pedra, retirar uma pedra, e separar a pilha em duas pilhas não vazias (não necessariamente iguais). Após vários movimentos, é possível que todas as pilhas restantes contenham exatamente três pedras?