XIX Semana Olímpica de Matemática

Nível 3

Funções Geratrizes

José Armando Barbosa

O projeto da XIX Semana Olímpica de Matemática foi patrocinado por:

Funções Geratrizes

Semana Olímpica/2016

Prof. Armando

29 de janeiro de 2016

---

1 Introdução

Uma ferramenta muito interessante em olimpíadas de matemática é o uso das funções geratrizes. Através delas, somos capazes de aliar álgebra e combinatória para provar vários resultados muito interessantes.

Vamos começar definindo o que é uma função geratriz. Considere uma sequência de números:

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

A **função geratriz** associada à sequência acima é a série abaixo:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots$$

Mas, qual a vantagem de associar uma sequência a uma série? Vejamos um exemplo:

Problema 1 Seja $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ e

$$a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} \quad \forall n \geqslant 2$$

Calcule a_n em função de n.

Solução: Considere a função geratriz onde cada termo a_i é exatamente o i-ésimo termo da sequência do enunciado. Daí, temos que:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots \\
f(x) - 1 - x &= (4 \cdot a_1 - 4 \cdot a_0) \cdot x^2 + (4 \cdot a_2 - 4 \cdot a_1) \cdot x^3 + \cdots \\
f(x) - 1 - x &= \left(4a_1 \cdot x + 4a_2 \cdot x^2 + \cdots\right) \cdot x - (4a_0 + 4a_1 \cdot x + \cdots) \cdot x^2 \\
f(x) - 1 - x &= 4x\,(f(x) - 1) - 4x^2 f(x) \\
f(x) \cdot (1 - 4x + 4x^2) &= 1 + x - 4x = 1 - 3x
\end{aligned}
$$

Por enquanto, para continuar o raciocínio, vamos supor que:

$$x \neq \pm\frac{1}{2}$$

Daí, temos que:

$$
\begin{aligned}
f(x) \cdot (1 - 4x + 4x^2) &= 1 + x - 4x = 1 - 3x \\
f(x) &= \frac{1 - 2x - x}{(1 - 2x)^2} \\
f(x) &= \frac{1}{1 - 2x} - x \cdot \frac{1}{(1 - 2x)^2}
\end{aligned}
$$

Para continuar a solução, precisamos lembrar do **famoso caso das PGs infinitas**. Por ora, vamos simplesmente "impor" que:

$$|2x| < 1 \to |x| < \frac{1}{2}$$

Olhando pela primeira vez, parece estranho, mas note que não há nada que impeça essa restrição ao valor de x. Além disso, há uma vantagem: agora podemos usar a fórmula da <u>soma da PG infinita</u>. Com isso, temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

Outro fato muito conhecido é resultante de elevar ao quadrado (ou "tirar a derivada") o resultado acima. Nesse caso, podemos concluir que:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1 - x}\right)^2 &= \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^2 \\
\frac{1}{(1 - x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Com os resultados acima, podemos terminar a questão. Para isso, voltemos ao último resultado encontrado:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-2x} - x \cdot \frac{1}{(1-2x)^2} \\
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (2x)^{n-1} \\
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n - n \cdot 2^{n-1}\right) x^n
\end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$a_n = 2^n - n \cdot 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$

1.1 Para treinar um pouco

Problema 2 Considerando a sequência de Fibonacci:

$$\begin{aligned}
F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \\
F_n = F_{n-1} - F_{n-2} \quad n \geqslant 2
\end{aligned}$$

a) Prove que a função geratriz associada, isto é, $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n$$

é igual a:

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

b) Usando a fórmula do item anterior, prove que:

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

2 Usando números binomiais

Uma das maiores utilidades de funções geratrizes está em resolver problemas de contagem. Em particular, problemas que envolvem escolher itens de um conjunto relacionam-se com funções geratrizes de forma que o coeficiente de x^n está relacionado ao número de formas de escolher n itens. Vamos começar do básico.

A sequência de números:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0 \cdots$$

possui a seguinte função geratriz associada:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

Por exemplo, temos que:

- O coeficiente de x^3 é $\binom{n}{3}$ e representa a quantidade de maneiras de escolher 3 elementos de um conjunto com n opções disponíveis.
- O coeficiente de x^{n+1} é 0 e representa a quantidade de maneiras de escolher $(n+1)$ elementos de um conjunto com n opções disponíveis.

Podemos aproveitar para lembrar a definição formal de número binomial:

2.1 Definições de números binomiais

- Para qualquer número real u e número inteiro positivo k, nós podemos definir número binomial "estendido" como:

$$\binom{u}{k} = \frac{u \cdot (u-1) \cdots (u-k+1)}{k!}$$

- Além disso, nós podemos definir:

$$\binom{u}{0} = 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

- Como consequência da primeira definição, temos que: Para inteiros positivos n e k, podemos concluir que:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k}$$

Note que com os exemplos acima, podemos analisar as funções geratrizes de funções como

$$\frac{1}{(1-x)^4} = (1-x)^{-4} \ , \ \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}, \cdots$$

Através da seguinte expressão: Para todo número real u, temos que:

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} = \binom{u}{0} + \binom{u}{1} \cdot x + \binom{u}{2} \cdot x^2 + \cdots$$

Para fixar melhor, vejamos um exemplo de aplicação:

Problema 3 Calcule o coeficiente de x^{2016} na função geratriz abaixo

$$\frac{1}{(1-x)^2 \cdot (1+x)^2}$$

Solução: Sejam A, B, C e D coeficientes tais que:

$$\frac{1}{(1-x)^2 \cdot (1+x)^2} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1+x)} + \frac{D}{(1+x)^2}$$

Fazendo as contas, temos que:

$$\frac{1}{(1-x)^2 \cdot (1+x)^2} = \frac{(-A+C) \cdot x^3 + (-A+B-C+D) \cdot x^2}{(1-x)^2 \cdot (1+x)^2} + \frac{(A+2B-C-2D) \cdot x + (A+B+C+D)}{(1-x)^2 \cdot (1+x)^2}$$

Comparando coefientes, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} -A + C &= 0 \\ -A + B - C + D &= 0 \\ A + 2B - C - 2D &= 0 \\ A + B + C + D &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo, temos que:

- Pela primeira equação: $A = C$;
- Aplicando o resultado anterior na terceira equação: $B = D$;
- Aplicando os dois resultados anteriores na segunda equação: $A = B = C = D$;
- Usando o resultado anterior na quarta equação:

$$A = B = C = D = \frac{1}{4}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2 \cdot (1+x)^2} &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{(1-x)} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[(1+(-x))^{-1} + (1+(-x))^{-2} + (1+x)^{-1} + (1+x)^{-2} \right]\end{aligned}$$

Lembrando que:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k}$$

Temos então que, em cada um dos termos acima , o coeficiente de x^{2016} é igual a:

- $(1+(-x))^{-1}$:

$$\binom{-1}{2016} \cdot (-x)^{2016} = \binom{-1}{2016} \cdot (-1)^{2016} \cdot x^{2016} = \binom{-1}{2016} \cdot x^{2016}$$

- $(1+(-x))^{-2}$:

$$\binom{-2}{2016} \cdot (-x)^{2016} = \binom{-2}{2016} \cdot (-1)^{2016} \cdot x^{2016} = \binom{-2}{2016} \cdot x^{2016}$$

- $(1+x)^{-1}$:

$$\binom{-1}{2016} \cdot x^{2016}$$

- $(1+x)^{-2}$:

$$\binom{-2}{2016} \cdot x^{2016}$$

Podemos, então, calcular o coeficiente de x^{2016} na função geratriz:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot \left[\binom{-1}{2016} + \binom{-2}{2016} + \binom{-1}{2016} + \binom{-2}{2016} \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\binom{-1}{2016} + \binom{-2}{2016} \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[(-1)^{2016} \cdot \binom{1+2016-1}{2016} + (-1)^{2016} \cdot \binom{2+2016-1}{2016} \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\binom{2016}{2016} + \binom{2017}{2016} \right] \\
&= \frac{1+2017}{2} \\
&= 1009
\end{aligned}
$$

3 Variando a função geratriz

Em certos casos, é mais interessante associar a sequência de números:

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

com outra **função geratriz**:

$$g(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots$$

Vejamos um exemplo simples:

Problema 4 Quantas soluções inteiras possui a equação

$$a + b + c = 6$$

satisfazendo $-1 \leqslant a \leqslant 2$ e $1 \leqslant b, c \leqslant 4$?

Solução: Percebamos que:

- Como $-1 \leqslant a \leqslant 2$, então podemos associar a contribuição de a com a função geratriz:

$$g(x) = x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2$$

- Como $1 \leqslant b, c \leqslant 4$, então podemos associar as contribuições de b e c com as funções geratrizes:

$$g(x) = x^1 + x^2 + x^3 + x^4$$

Portanto, nosso interesse é procurar o coeficiente de x^6 na função geratriz abaixo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2) \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2 \\
&= x \cdot (1 + x + x^2 + x^3)^3 \\
&= x \cdot \left(\frac{1 - x^4}{1 - x}\right)^3 \\
&= x \cdot (1 - 3x^4 + 3x^8 - x^{12}) \cdot (1 + (-x))^{-3} \\
&= (x - 3x^5 + 3x^9 - x^{13}) \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{-3}{k} x^k\right]
\end{aligned}$$

Notemos que o somatório relacionado a $(1-x)^3$ começa com $k=0$. Portanto, o coeficiente de x^6 procurado é igual a:

$$\begin{aligned}
&= 1\cdot(-1)^5\cdot\binom{-3}{5}+(-3)\cdot(-1)^1\cdot\binom{-3}{1}\\
&= -1\cdot(-1)^{-3}\cdot\binom{3+5-1}{5}+3\cdot(-1)^{-3}\cdot\binom{3+1-1}{1}\\
&= \binom{7}{5}-3\cdot\binom{3}{1}\\
&= 21-3\cdot 3=12
\end{aligned}$$

3.1 Para treinar um pouco

Problema 5 *(Nórdica/2000)* De quantas formas o número 2000 pode ser escrito como soma de 3 inteiros positivos tais que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$?

3.2 Falando mais sobre partições

Uma partição de um inteiro n é uma sequência não crescente de inteiros positivos $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_k$ tais que:

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

Dizemos que os a_i's são partes da partição.
Nesse caso, costumamos definir $p(n)$ como a quantidade de formas distintas de particionar o número n. Por exemplo, $p(4)=5$, pois temos as seguintes partições:

- $4=4$;
- $4=3+1$;
- $4=2+2$;
- $4=2+1+1$;
- $4=1+1+1+1$.

Por convenção, $p(0)=1$.
Vamos resolver uma questão clássica sobre o assunto:

Problema 6 Seja n um inteiro positivo. Sejam

- $f(n)$ o número de partições de n em partes distintas;
- $g(n)$ o número de partições de n sendo todas as partes ímpares.

Prove que $f(n) = g(n)$.

Solução: Pelas definições dadas no enunciado, temos que:

- $f(n)$ é igual ao coeficiente de x^n em:

$$f(n) = (1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^3)\cdots$$

pois cada número i, representado por $(1+x^i)$ pode participar ou não da partição.

- $g(n)$ é igual ao coeficiente de x^n em:

$$g(n) = \left(x^{0\cdot 1} + x^{1\cdot 1} + x^{2\cdot 1} + \cdots\right)\cdot\left(x^{0\cdot 3} + x^{1\cdot 3} + x^{2\cdot 3} + \cdots\right) \cdot\left(x^{0\cdot 5} + x^{1\cdot 5} + x^{2\cdot 5} + \cdots +\right)\cdots$$

onde cada termo $x^{i\cdot j}$ representa que o impar j foi somado i vezes na partição. Arrumando $g(n)$:

$$g(n) = \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)\cdot\left(1 + x^3 + x^6 + \cdots\right)\cdot\left(1 + x^5 + x^{10} + \cdots +\right)\cdots$$

Vamos primeiro melhorar $g(n)$. Tomando x tal que $|x| < 1$, teremos então muitas somas de PG infinitas. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} g(n) &= \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)\cdot\left(1 + x^3 + x^6 + \cdots\right)\cdot\left(1 + x^5 + x^{10} + \cdots +\right)\cdots \\ g(n) &= \left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\cdots \end{aligned}$$

Agora basta ajustar $f(n)$. Daí, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} f(n) &= (1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^3)\cdots \\ f(n) &= \left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1-x^4}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{1-x^6}{1-x^3}\right)\cdots \end{aligned}$$

Daí, notemos que $f(n) = g(n)$, pois na fatoração de $f(n)$ só restarão os temos do tipo:

$$\frac{1}{1-x^i} \quad i \text{ impar}$$

3.3 Generalizando...

Problema 7 Seja $p(n)$ o número de partições de n. Mostre que a função geratriz para $p(n)$ é igual a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(x) \cdot x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x^3}\right) \cdots$$

4 Olhando raízes da unidade

Em algumas situações, o mais interessante não é fazer $|x| < 1$, mas sim observar as raízes da unidade. Antes de tudo, relembremos o que são raízes da unidade:

Uma n-ésima raíz da unidade é um número complexo ω tal que $\omega^n = 1$. Por exemplo, as raízes quartas da unidade são : ± 1, $\pm i$. É possível provar, porém foge do escopo desse material, que:

$$w = cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \cdots, (n-1)$$

Sendo $cis\,(\alpha) = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$.

Uma relação extremamente útil sobre raíz da unidade ω, provada, por exemplo, com relação de Girard, está a seguir:

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0 \quad \omega \neq 1$$

Vejamos dois exercícios resolvidos:

Problema 8 Um retângulo $a \times b$ pode ser coberto completamente, sem buracos, excessos ou sobreposições, com peças do tipo $p \times 1$ e $1 \times q$, sendo a, b, p e q inteiros positivos fixados. Prove que $p|a$ ou $q|b$.
Obs.: As peças não podem ser rotacionadas. Em outras palavras, uma peça $1 \times k$ é diferente de uma peça $k \times 1$.

Solução: Coloquemos em cada peça localizada na posição (i, j) o termo $x^i \cdot y^j$, sendo $1 \leqslant i \leqslant a$ e $1 \leqslant j \leqslant b$. Nesse caso, temos que:

- para cada peça $p \times 1$, podemos associar a soma:

$$x^i \cdot y^j + x^{i+1} \cdot y^j + \cdots + x^{i+p-1} \cdot y^j = x^i \cdot y^j \cdot \left(1 + x + \cdots x^{p-1}\right)$$

- analogamente, para cada peça $1 \times q$, podemos associar a soma:

$$x^i \cdot y^j \cdot \left(1 + y + \cdots + y^{q-1}\right)$$

Para facilitar então, tomemos caras "adequados". Sejam x e y tais que:

$$x = cis\left(\frac{2\pi}{p}\right) \quad y = cis\left(\frac{2\pi}{q}\right)$$

Para esses x e y escolhidos, temos que a soma dos termos de cada peça $p \times 1$ ou $1 \times q$ é igual a 0 pela relação extremamente útil citada.

Daí, como a cobertura é possível, então temos que a soma de todos os números da forma $x^i \cdot y^j$, sendo $1 \leqslant i \leqslant a$ e $1 \leqslant j \leqslant b$, é igual a 0. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \left(x^i \cdot y^j\right) = \sum_{i=1}^{a} x^i \cdot \sum_{j=1}^{b} y^j \\ &= \frac{1-x^a}{1-x} \cdot \frac{1-y^b}{1-y} \end{aligned}$$

Daí, temos dois casos:

1. $1 - x^a = 0 \rightarrow x^a = 1$:
   Nesse caso, temos que:

$$\begin{aligned} x^a = cis\left(\frac{2\pi}{p}\right)^a = cis\left(\frac{2\pi \cdot a}{p}\right) &= 1 \\ \leftrightarrow \frac{2a\pi}{p} &= 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \leftrightarrow p|a & \end{aligned}$$

2. $1 - y^b = 0 \rightarrow y^b = 1$:
   Analogamente, esse caso leva a: $q|b$.

Problema 9 Encontre o número de subconjuntos de $\{1, 2, \cdots, 2016\}$ cuja a soma dos elementos é divisível por 13.

Solução: Consideremos a função geratriz

$$f(x) = (1 + x) \cdot (1 + x^2) \cdots (1 + x^{2016})$$

Note que cada subconjunto

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \subset \{1, 2, \cdots, 2016\}$$

corresponde a um termo da forma

$$x^{a_1+a_2+\cdots+a_k}$$

na expansão de $f(x)$. Portanto, para cada m, o coeficiente de x^m em $f(x)$ é igual a quantidade de subconjuntos de $\{1, 2, \cdots, 2016\}$ cuja soma dos elementos é igual a m.

Dessa forma, estamos interessados em calcular a soma dos coeficientes de x^k tal que $13|k$. Nada mais natural, então, do que usar uma 13^a raíz da unidade, pois, nesse caso, só os termos que nos interessam não são zerados. Façamos isso então.

Seja ω tal que:

$$\omega = cis\left(\frac{2\pi}{13}\right)$$

Daí, pela relação extremamente útil, citada acima, temos que a resposta procurada $\mathbb{T}$ é igual a:

$$\mathbb{T} = \frac{1}{13} \cdot \big(f(1) + f(\omega) + \cdots + f(\omega^{12})\big)$$

Para entender melhor porque a expressão acima é a resposta procurada, vejamos o coefiente de x^1 na soma: $\mathbb{S} = f(1) + f(\omega) + \cdots + f(\omega^{12})$. Seja a_1 esse coeficiente. Daí, temos que:

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & a_0 + a_1 + \cdots \\ f(\omega) & = & a_0 + a_1 \cdot w + \cdots \\ f(\omega^2) & = & a_0 + a_1 \cdot w^2 + \cdots \\ & \vdots & \\ f(\omega^{12}) & = & a_0 + a_1 \cdot w^{12} + \cdots \end{array}$$

Portanto, o coeficiente de x_1 na soma $\mathbb{S}$ é igual a: $1 + \omega + \cdots + \omega^{12} = 0$, pela relação extremamente útil. A análise dos coeficientes de x^m, tal que $13 \nmid m$ são análogos, pois para $1 \leqslant k \leqslant 12$, o conjunto $\{k, 2k, \cdots, 12k\}$ é uma permutação de $\{1, 2, \cdots, 12\}$ em relação a resíduos $\pmod{13}$.

Agora, tentemos achar esse valor. Primeiramente, lembremos que os zeros do polinômio $y^{13} - 1 = 0$ são $1, \omega, \omega^2, \cdots .\omega^{12}$. Daí, temos que:

$$y^{13} - 1 = (y - 1) \cdot (y - \omega) \cdot (y - \omega^2) \cdots (y - \omega^{12})$$

Fazendo $y = -1$, podemos concluir que:

$$2 = (1+1)\cdot(1+\omega)\cdot(1+\omega^2)\cdots(1+\omega^{12})$$

Lembrando que $1 \leqslant k \leqslant 12$, o conjunto $\{k, 2k, \cdots, 12k\}$ é uma permutação de $\{1, 2, \cdots, 12\}$ em relação a resíduos $\pmod{13}$. Daí, temos que:

$$(1+1)\cdot(1+\omega^k)\cdot(1+\omega^{2k})\cdots(1+\omega^{12k}) = 2$$

Como $2016 = 13\cdot 155 + 1$, então nós temos que:

$$\begin{aligned}
f(\omega^k) &= (1+\omega^k)\cdot(1+\omega^{2k})\cdots(1+\omega^{2016k})\\
&= \big[(1+1)\cdot(1+\omega^k)\cdot(1+\omega^{2k})\cdots(1+\omega^{12k})\big]^{155}\cdot(1+\omega^k)\\
&= 2^{155}\cdot(1+\omega^k)
\end{aligned}$$

Lembrando que $f(1) = 2^{2016}$, então podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T} &= \frac{1}{13}\cdot\big(f(1)+f(\omega)+\cdots+f(\omega^{12})\big)\\
&= \frac{1}{13}\cdot\big[2^{2016}+2^{155}\cdot\big(12+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{12}\big)\big]\\
&= \frac{1}{13}\cdot\big(2^{2016}+2^{155}\cdot 11\big)\\
\mathbb{T} &= \frac{2^{2016}+2^{155}\cdot 11}{13}
\end{aligned}$$

4.1 Para treinar mais um pouco

Problema 10 Encontre o número de subconjuntos de $\{1, 2, \cdots, 2016\}$ cuja a soma dos elementos é divisível por 61.

5 Questões

Problema 11 *(Itália/1996)* Dado o alfabeto com três letras a, b e c encontre o número de palavras com n letras contendo um número par de a's.

Problema 12 Calcule a_n sabendo que:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2$$
$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n \ \forall n \geqslant 0$$

Problema 13 *(Kosovo-TST/2015)*

a) Prove que para todo natural n, existem naturais a e b tais que:

$$(1-\sqrt{2})^n = a - b \cdot \sqrt{2}$$
$$a^2 - 2b^2 = (-1)^n$$

b) Usando a primeira equação, prove que para todo inteiro n existe um inteiro m tal que:

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

Problema 14 *(Teste Cone Sul/2013)* Uma sequência de números reais a_1, a_2, ..., a_n, ... é tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 9$ e $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 4$ para todos os inteiros positivos n. Prove que para cada inteiro positivo n o número a_n é um quadrado de um número inteiro.

Problema 15 a) Sejam α, β números complexos. Determine a função geratriz da sequência a_n tal que:

$$a_0 = \alpha \quad a_1 = \beta$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \forall n \geqslant 2$$

b) Determine a função geratriz para a sequência b_n tal que:

$$b_0 = 0$$
$$b_n = 2b_{n-1} + n \ \forall n \geqslant 1$$

Problema 16 Sendo n um inteiro positivo, seja a_n o número de formas de n reais ser trocado em moedas de 1 real ou cédulas de 2 reais. Por exemplo, $a_3 = 2$ pois temos duas formas de trocar 3 reais: 1 cédula de 2 reais + 1 moeda de 1 real ou 3 moedas de 1 real. Calcule a_n.

Problema 17 Seja n um inteiro positivo. Calulce o número a_n de polinômios $P(x)$ cujo todos os coeficientes estão em $\{0, 1, 2, 3\}$ tal que $P(2) = n$.

Problema 18 No Brasil, existe moedas de 1, 5, 10, 25, 50 centavos e a moeda de 1 real. De quantas formas distintas podemos juntar 1 (ou seja, 100 centavos) com essas moedas?

Problema 19 Seja n um inteiro positivo. Mostre que o número de partições de n em partes impares maiores que 1 é igual ao número de partições de n em partes distintas, sendo nenhuma delas uma potência de 2.

Problema 20 *(Shortlist-IMO/1998)* Sejam $a_0, a_1, a_2, \cdots$ uma sequência crescente de inteiros não negativos tal que cada número inteiro não negativo pode ser expresso unicamente na forma $a_i + 2 \cdot a_j + 4 \cdot a_k$ sendo i, j, e k não necessariamente distintos. Determine a_{1998}.

Problema 21 Uma sequência de $2n$ parenteses é considerada válida se:

- existem n abre parenteses e n fecha parenteses;
- considerando uma soma $S = 0$, ao percorrer a sequência da esquerda para direita, adicionando 1 a cada abre parenteses e subtraindo 1 a cada fecha parenteses, então essa soma nunca é negativa.

Seja C_n a quantidade de sequências válidas com $2n$ parenteses. Por exemplo, para $C_2 = 2$, pois há 2 sequências possíveis com 2 pares de parenteses: ()() e (()) .
Obs.: Considere $C_0 = 1$.

a) Prove que:

$$C_n = C_{n-1} \cdot C_0 + C_{n-2} \cdot C_1 + \cdots + C_1 \cdot C_{n-2} + C_0 \cdot C_{n-1}$$

b) Sendo $f(x)$ a função geratriz associada, isto é:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \cdot x^i$$

Prove que:

$$f(x) = C_0 + x \cdot (f(x))^2$$

c) Demonstre que:

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{1!} \cdot 2x - \frac{1}{2!} \cdot 4 \cdot x^2 - \frac{3 \cdot 1}{3!} \cdot 8 \cdot x^3 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!} \cdot 16 \cdot x^4 - \cdots$$

d) Mostre que:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

Obs.: C_n é chamado de n-ésimo **número de Catalan**.
Outra questão bastante clássica associada a tal número é a de provar que há C_n formas diferentes de dividir um polígono convexo de $(n+2)$ lados em triângulos a partir dos traços de algumas de suas diagonais, sendo os lados de tais triângulos os lados ou as diagonais de tal polígono.

Problema 22 *(IME/2005)* Sejam S_0 e S_1 somas definidas por:

$$\begin{aligned} S_0 &= \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{3 \cdot \lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \\ S_1 &= \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{3 \cdot \left\lfloor \frac{(n-1)}{3} \right\rfloor + 1} \end{aligned}$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de n.
Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1 + cis\frac{2\pi}{3}\right)^n$.

Problema 23 É possível particionar o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os inteiros positivos em mais que um, porém um número finito, de progressões aritméticas de forma que elas são todas duas a duas distintas entre si?

Problema 24 *(IMO/1995)* Seja p um número primo impar. Encontre todos os subconjuntos A de $\{1, 2, \cdots, 2p\}$ tais que:

(i) A tem exatamente p elementos;

(ii) a soma de todos os elementos de A é divisível por p.

Problema 25 *(Bulgária-TST/2005)* Encontre o número de subconjuntos B do conjunto $\{1, 2, \cdots, 2005\}$ tal que a soma dos elementos de B deixa resto 2006 na divisão por 2048.
Obs.: Questão pegadinha!

6 Algumas séries formais conhecidas

Sequência	Série formal	Fórmula fechada
$(1,1,1,1,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0} x^n$	$\frac{1}{1-x}$
$(1,-1,1,-1,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$	$\frac{1}{1+x}$
$(1,0,1,0,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0} x^{2n}$	$\frac{1}{1-x^2}$
$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } k \mid n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\sum_{n\geq 0} x^{kn}$	$\frac{1}{1-x^k}$
$(1,2,3,4,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
$(1,c,\binom{c}{2},\binom{c}{3},\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}\binom{c}{n}x^n$	$(1+x)^c$
$(1,c,\binom{c+1}{2},\binom{c+2}{3},\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}x^n$	$\frac{1}{(1-x)^c}$
$(1,c,c^2,c^3,\ldots)$	$\sum_{n\geq 0} c^n x^n$	$\frac{1}{1-cx}$
$(1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\binom{m+3}{m},\ldots)$	$\sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{m}x^n$	$\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$
$(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots)$	$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$	$\ln\frac{1}{1-x}$
$(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots)$	$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$	$\ln(1+x)$
$(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\ldots)$	$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}$	e^x

7 Outras questões de recorrência

Problema 26 Prove as seguintes fórmulas da sequência de Fibonacci:

a) $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$;

b) $F_0 - F_1 + F_2 - \cdots - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$;

c) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$;

d) $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$;

e) $F_{m+n+1} = F_{m+1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_n$.

Obs.: Na sequência de Fibonacci, temos que: $F_0 = 0$.

Problema 27 *(Alemanha/2001)* Seja uma sequência $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in 1, 2, \cdots, n$ tal que:

$$a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{(a_{n+1} + a_n)}$$

Prove que tal sequência é única e encontre uma fórmula para a recorrência definida por esta sequência.

Problema 28 *(Turquia/1998)* Seja a_n uma sequência de números reais definida por:

$$a_1 = t$$
$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n \cdot (1 - a_n), \quad n \geqslant 1$$

Para quantos valores distintos de t temos $a_{1998} = 0$?

Problema 29 *(Sérvia/2011)* Seja $n \geqslant 2$ um inteiro. Seja $a_0, \cdots, a_n$ uma sequência de reais positivos tais que:

$$(a_{k-1} + a_k) \cdot (a_k + a_{k+1}) = (a_{k-1} - a_{k+1})$$

para todo $k = 1, 2, \cdots, (n-1)$. Prove que $a_n < \frac{1}{n-1}$.

Problema 30 *(Irlanda/1999)* Mostre que existe um número positivo na sequência de Fibonacci que é divisível por 1000.

Problema 31 *(Seletiva Fortaleza - Rioplatense/2012)* Mostre que se p é um divisor primo de $L_{2n} - 2$, entãop p é um divisor primo de $L_{2n+1} - 1$.
Obs.: L_k é a sequencia de Lucas: $L_0 = 2$; $L_1 = 1$ e, para $k \geqslant 1$: $L_{k+1} = L_k + L_{k-1}$.

Problema 32 *(Bulgária/2012)* A sequência $a_1, a_2, \cdots$ é definida pela regra:

$$a_{n+1} = a_n + 2 \cdot t(n), \forall n \geqslant 1$$

sendo $t(n)$ o número de divisores positivos distintos de n. É possível que dois termos consecutivos da sequência sejam quadrados de números naturais?

Problema 33 Considere a sequência:

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n} \text{ para } n \geqslant 0$$

Determine o valor de a_n.

Problema 34 *(Espanha/2012)* Uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ é definida pela recorrência:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 5$$
$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}}$$

Prove que todos os termos da sequência são inteiros e determine o valor de a_n.

Problema 35 *(Lista Cone Sul/2014)* Considere a sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2011$$
$$x_{n+2} = 4022 x_{n+1} - x_n, \ \forall n = 0, 1, \cdots$$

Prove que $\dfrac{x_{2012} + 1}{2012}$ é um quadrado perfeito.

Problema 36 *(Lista Cone Sul/2014)* Seja a_n uma sequência de inteiros tais que:

$$(n-1)\cdot a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n - 2\cdot(n-1), \quad \forall n \geqslant 1$$

Sabendo que $2016|a_{2015}$, encontre o menor valor de $n \geqslant 2$ tal que $2016|a_n$.

Problema 37 *(Teste Cone Sul/2013)* Seja $x_1 = 1$ e para todo inteiro $n \geqslant 1$ seja x_n definida por:

$$x_{n+1} = x_n + \left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + 2$$

onde $\lfloor n \rfloor$ denota parte inteira de n. Encontre o valor de x_{2013}.

Problema 38 *(IMO - Shortlist/2006)* Uma sequência de números reais $a_0, a_1, \cdots, a_n$ é definida da seguinte forma:

$$a_0 \text{ é um número real qualquer;}$$
$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor \cdot \{a_n\} \quad \text{para } n \geqslant 0$$

Prove que $a_n = a_{n+2}$ para algum n.

Problema 39 *(Rússia/2008)* As sequências a_n e b_n são definidas da seguinte forma:

$$a_1 = 1 \text{ , } b_1 = 2$$
$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n} \text{ , } b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n} \text{ para } n \geqslant 1$$

Prove que $a_{2008} < 5$.

Problema 40 *(Ibero/2002)* A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é definida como:

$$a_1 = 56$$
$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n} \text{ , para cada} n \geqslant 1$$

Demonstre que existe um inteiro k, $1 \leqslant k \leqslant 2002$, tal que $a_k < 0$.

Problema 41 *(Ibero/2010)* Determine se existe inteiros positivos a, b tais que todos os termos da sequência x_n definidos por:

$$x_1 = 2010 \quad x_2 = 2011$$
$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}$$

são inteiros.