XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática
Gabarito Primeira Fase - Nível Universitário

1) Há muito tempo, em uma galáxia muito distante, utilizavam-se como referência para viagens espaciais os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, vértices de um cubo de aresta igual a um ano-luz tendo os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ como faces e tendo os segmentos AE, BF, CG e DH como arestas. Uma nave espacial viaja com velocidade constante em trajetória retilínea de B para C. Outra nave viaja com velocidade constante igual ao triplo da velocidade da primeira, em trajetória retilínea de A para G. Sabendo que a primeira atinge o ponto C no mesmo instante em que a segunda atinge o ponto G, determine a menor distância entre as naves durante esse deslocamento.

Solução:

Dando coordenadas, suponha sem perda de generalidade que

$$A = (0,0,0), \quad B = (1,0,0), \quad C = (1,1,0), \quad D = (0,1,0),$$
$$E = (0,0,1), \quad F = (1,0,1), \quad G = (1,1,1), \quad H = (0,1,1).$$

Se as posições (em função do tempo) das duas naves são $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, respectivamente, se $t = 0$ é o instante em que $\alpha(t) = C$ e $\beta(t) = G$ e $t = -1$ é o instante em que $\alpha(t) = B$ temos

$$\alpha(t) = (1,1,0) + t(0,1,0), \quad \beta(t) = (1,1,1) + \sqrt{3}\, t(1,1,1).$$

[3 pontos por escrever estas parametrizações ou outras equivalentes.]

Assim o quadrado da distância em função do tempo é

$$
\begin{aligned}
h(t) &= ((1) - (1 + \sqrt{3}\,t))^2 + ((1+t) - (1 + \sqrt{3}\,t))^2 + (0 - (1 + \sqrt{3}\,t))^2 \\
&= 3t^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 t^2 + 1 + 2\sqrt{3}\,t + 3t^2 = (10 - 2\sqrt{3})t^2 + 2\sqrt{3}\,t + 1.
\end{aligned}
$$

[Mais 3 pontos por escrever o quadrado da distância em função de t.]

Temos

$$h'(t) = (20 - 4\sqrt{3})t + 2\sqrt{3}.$$

Para $t_0 = -2\sqrt{3}/(20 - 4\sqrt{3}) = -(3 + 5\sqrt{3})/44 \approx -0.265$ temos $h'(t_0) = 0$; para $t < t_0$ temos $h'(t) < 0$ e para $t > t_0$ temos $h'(t) > 0$.

[Mais 2 pontos por encontrar t_0.]

Assim o mínimo do quadrado da distância é

$$h(t_0) = (29 - 3\sqrt{3})/44 \approx 0.541$$

e a distância mínima é

$$\sqrt{(29 - 3\sqrt{3})/44} \approx 0.7355$$

[Mais 2 pontos por completar o problema.]

2) Quantos são os pares ordenados (x, y), com $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, 142\}$ tais que $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de 143?

Solução:

Note que $143 = 11 \times 13$. Se N_p é o número de pares ordenados (x, y) com $x, y \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ tais que $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de p, então a resposta do problema será $N_{11} \cdot N_{13}$. De fato, $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de 143 se, e somente se, é múltiplo de 11 e de 13. Por outro lado, pelo teorema chinês dos restos, dados pares ordenados (x', y') com $x', y' \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ e (x'', y'') com $x'', y'' \in \{0, 1, \ldots, 12\}$, existe um único par ordenado (x, y) com $x, y \in \{0, 1, \ldots, 142\}$ tal que $x \equiv x' \pmod{11}, x \equiv x'' \pmod{13}, y \equiv y' \pmod{11}$ e $y \equiv y'' \pmod{13}$.

[5 pontos por reduzir o problema a resolvê-lo módulo 11 e módulo 13.]

Vamos agora calcular N_{11} e N_{13}. Os possíveis valores de $x^2 \pmod{11}$ são $0, 1, 4, 9, 5, 3$, sendo cada valor não nulo atingido para duas classes de congruência módulo 11. Assim, 5 é quadrado módulo 11 mas 7 não é, e portanto $5x^2 \pmod{11}$ assume os valores $0, 1, 3, 4, 5, 9$, enquanto $7x^2 \pmod{11}$ assume os valores $0, 2, 6, 7, 8, 10$ (nos dois casos os valores não nulos são assumidos duas vezes). Temos que 1 é o resultado módulo 11 da soma de números dessas duas listas nas formas $1 + 0, 4 + 8$ e $5 + 7$, o que dá $2 + 4 + 4 = 10$ soluções módulo 11 de $5x^2 + 7y^2 = 1$, e portanto $N_{11} = 10$. Analogamente, os possíveis valores de $x^2 \pmod{13}$ são $0, 1, 4, 9, 3, 12, 10$, sendo cada valor não nulo atingido para duas classes de congruência módulo 13. Assim, 5 e 7 não são quadrados módulo 13, e portanto $5x^2 \pmod{13}$ e $7x^2 \pmod{13}$ assumem os valores $0, 2, 5, 6, 7, 8, 11$ (os valores não nulos são assumidos duas vezes). Temos que 1 é o resultado módulo 13 da soma de dois números dessa lista nas formas $6 + 8, 8 + 6$ e $7 + 7$, o que dá $4 + 4 + 4 = 12$ soluções módulo 13 de $5x^2 + 7y^2 = 1$, e portanto $N_{13} = 12$.

Assim, a resposta do problema é $N_{11} \cdot N_{13} = 10 \cdot 12 = 120$.

[Mais 5 pontos por completar o problema.]

3) Dados dois polinômios com coeficientes complexos em uma variável $f(x)$ e $h(x)$, prove que existe um polinômio $g(x)$ tal que $f(x) = g(h(x))$ se, e somente se, existe um polinômio com coeficientes complexos em duas variáveis $q(x, y)$ tal que $f(x) - f(y) = q(x, y)(h(x) - h(y))$.

Solução:

Note que, se $g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, então $g(u) - g(v) = a_n(u^n - v^n) + \cdots + a_1(u - v) = (u - v)(a_n u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + v^{n-1}) + \cdots + a_1) = R(u, v) \cdot (u - v)$, para um certo polinômio em duas variáveis $R(x, y)$, e logo, se $f(x) = g(h(x))$, então $f(x) - f(y) = g(h(x)) - g(h(y)) = R(h(x), h(y)) \cdot (h(x) - h(y) = q(x, y)(h(x) - h(y))$, com $q(x, y) := R(h(x), h(y))$, o que mostra a primeira implicação.

[3 pontos por provar que, se existe um polinômio $g(x)$ tal que $f(x) = g(h(x))$, então existe um polinômio com coeficientes complexos em duas variáveis $q(x, y)$ tal que $f(x) - f(y) = q(x, y)(h(x) - h(y))$.]

Vamos provar a volta por indução no grau de f. Se o grau de f for 0, as duas afirmações são verdadeiras. Suponha agora que f não é constante e que $f(x) - f(y) = q(x, y)(h(x) - h(y))$ (daí segue que h não é constante). Fazendo $y = 0$, obtemos $f(x) - f(0) = q(x, 0)(h(x) - h(0))$, para todo x, e portanto, $f(y) - f(0) = q(y, 0)(h(y) - h(0))$, para todo y. Subtraindo, obtemos $q(x, y)(h(x) - h(y)) = f(x) - f(y) = q(x, 0)(h(x) - h(0)) - q(y, 0)(h(y) - h(0)) = q(x, 0)(h(x) - h(y)) + (q(x, 0) - q(y, 0))(h(y) - h(0))$. Assim, $h(x) - h(y)$ divide o polinômio $(q(x, 0) - q(y, 0))(h(y) - h(0))$. Como h não é constante e $h(y) - h(0)$ é um polinômio só na variável y, segue que $h(x) - h(y)$ não tem nenhum fator comum (não constante) com $h(y) - h(0)$, e portanto $h(x) - h(y)$ divide o polinômio $q(x, 0) - q(y, 0)$. Seja $\tilde{q}(x) := q(x) - q(0)$. Temos $f(x) - f(0) = q(x, 0)(h(x) - h(0)) = \tilde{q}(x)(h(x) - h(0))$, donde o grau de $\tilde{q}$ é menor que o grau de f. Por outro lado, $h(x) - h(y)$ divide o polinômio $q(x, 0) - q(y, 0) = \tilde{q}(x) - \tilde{q}(y)$, e portanto, por hipótese de indução, existe um polinômio $\tilde{g}(x)$ tal que $\tilde{q}(x) = \tilde{g}(h(x))$, donde $f(x) = f(0) + \tilde{q}(x)(h(x) - h(0)) = f(0) + \tilde{g}(h(x))(h(x) - h(0)) = g(h(x))$, onde $g(x) := f(0) + \tilde{g}(x)(x - h(0))$, o que completa a demonstração.

[**7 pontos por provar que, se existe um polinômio com coeficientes complexos em duas variáveis $q(x, y)$ tal que $f(x) - f(y) = q(x, y)(h(x) - h(y))$, então existe um polinômio $g(x)$ tal que $f(x) = g(h(x))$.**]

4) Seja n um inteiro positivo.

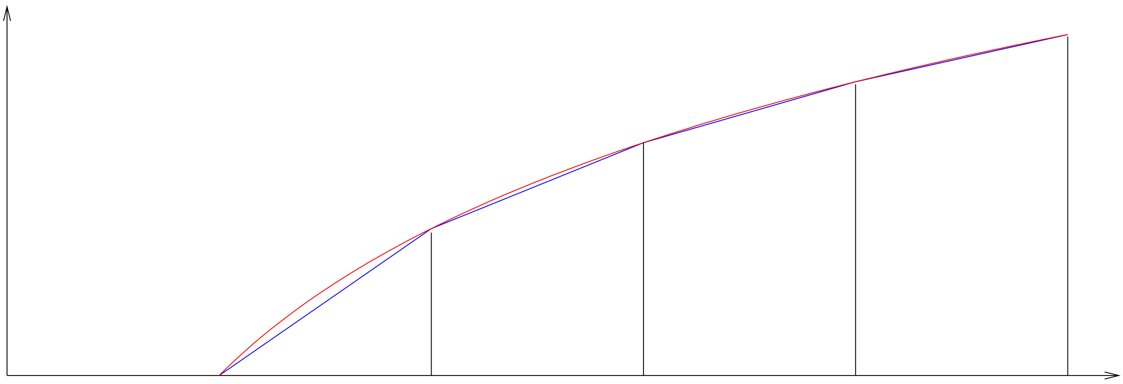
Seja A_n o subconjunto do plano definido por $1 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \ln(x)$. Seja B_n o polígono convexo de vértices $(1,0) = (1, \ln(1)), (2, \ln(2)), (3, \ln(3)), ..., (n, \ln(n)), (n, 0)$. Seja $C_n = A_n - B_n$, o complemento de B_n em relação a A_n.

(a) Calcule as áreas de A_n, B_n e C_n. Simplifique sua resposta.

(b) Mostre que a área de C_n é menor que 1, para qualquer inteiro positivo n.

Obs: ln representa o logaritmo na base e.

Solução:



A figura mostra as regiões A_5 (abaixo da curva vermelha), B_5 (abaixo da poligonal azul) e C_5 (entre a poligonal azul e a curva vermelha).

Temos

$$\text{Area}(A_n) = \int_1^n \ln(t)dt = n\ln(n) - n + 1;$$

$$\text{Area}(B_n) = \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln(n) = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n);$$

$$\text{Area}(C_n) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + 1 - \ln(n!).$$

[Item (a); 3 pontos]

Para estimar Area(C_n) escreva

$$a_k = \int_k^{k+1} \ln(t) - \ln(k) - (t-k)(\ln(k+1) - \ln(k))dt;$$

note que a_k é a área da k-ésima "bochechinha" entre a poligonal azul e a curva vermelha. Assim,

$$\text{Area}(C_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1};$$

queremos estimar a_k para mostrar que a série abaixo converge para $S < 1$:

$$0 < S = a_1 + a_2 + \cdots + c_k + \cdots < 1.$$

[Mais 1 ponto por organizar até aqui.]

Seja $u_k(t) = \ln(t) - \ln(k) - (t-k)(\ln(k+1) - \ln(k)))$; temos $u_k(k) = u_k(k+1) = 0$. Note que $u_k''(t) = -t^{-2}$. Integrando por partes temos

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_k^{k+1} u_k(t)dt \\
&= -\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) u_k'(t)dt \\
&= -\left[\frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 u_k'(t)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} \frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 u_k''(t)dt \\
&= \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2\right)(-u_k''(t))dt
\end{aligned}$$

Para $k \leq t \leq k+1$ temos $-u_k''(t) < k^{-2}$ donde

$$a_k \leq k^{-2} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2\right) dt = \frac{1}{12k^2}.$$

[Mais 4 pontos por esta estimativa ou outra similar que permita completar a solução.]

Temos portanto

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{1}{12}\left(1 + 1/2^2 + \cdots + 1/k^2 + \cdots\right) \\ &\leq \frac{1}{12}\left(1 + \int_1^{+\infty} t^{-2}dt\right) \leq \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

completando a demonstração (com folga!).

[**Mais 2 pontos por completar a demonstração.**]

Observação: Este problema mostra como obter estimativas como a de Stirling: temos $0 \leq \text{Area}(C_n) \leq 1/6$ donde

$$0 \leq n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + 1 - \ln(n!) \leq \frac{1}{6}$$
$$n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{5}{6} \leq \ln(n!) \leq n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + 1$$
$$n^n e^{-n}\sqrt{e^{5/3}n} \leq n! \leq n^n e^{-n}\sqrt{e^2 n}$$

Sabemos por Stirling que a melhor aproximação é

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n};$$

note que $e^{5/3} < 2\pi < e^2$.

5) Suponha que temos um grafo com $n+1 \geq 4$ vértices e queremos pintar suas arestas com duas cores de forma que não haja duas arestas disjuntas da mesma cor. Mostre que há no máximo 2^n tais colorações.

Observações: Um grafo é formado por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, cada aresta unindo dois vértices distintos e cada par de vértices sendo unido por no máximo uma aresta. Arestas disjuntas são arestas que não têm vértices em comum.

Solução:

Suponha que algum vértice do grafo esteja contido em todas as arestas do grafo. Então o grafo é uma estrela com n pontas, e o resultado segue (há exatamente 2^n colorações para este exemplo).

[3 pontos por estudar o caso em que algum vértice do grafo esteja contido em todas as arestas do grafo.]

Suponha que o grafo tenha um vértice x de grau ≥ 3 (i.e., que pertença a pelo menos 3 arestas) e que exista uma aresta disjunta de x, digamos e. Devido à hipotese sobre o grau de x, para qualquer tal aresta e, há uma aresta $f = f(e)$ que incide em x que é disjunta de e. Então, em qualquer coloracao das arestas que incidem em x, a cor de f define a cor de e (a cor de f é a oposta de e). Assim, há no máximo $2^{\mathrm{grau}(x)} \leq 2^n$ colorações.

[Mais 4 pontos por resolver o problema no caso em que o grafo tenha um vértice x de grau ≥ 3 e que exista uma aresta disjunta de x.]

Se o grafo tem um vértice x de grau 2, ligado a dois outros vértices y e z, então, para toda aresta e disjunta de x que não seja a (possível) aresta yz, há uma aresta $f = f(e)$ que incide em x que é disjunta de e, cuja cor determina a cor de e. Assim, as cores de xy, xz e de yz (se existir) determinam todas as outras. Assim, há no máximo $2^3 \leq 2^n$ colorações.

Finalmente, se todo vértice tem grau no máximo 1, todas as arestas são disjuntas, e nesse caso, pelas hipóteses do problema, o grafo pode máximo duas arestas e há no máximo $2^2 < 2^n$ colorações.

[Mais 3 pontos por resolver o problema no caso em que todo vértice tem grau no máximo 2.]

6) Cada um dos itens a seguir apresenta um valor diferente para a matriz B. Para cada um desses valores, determine quantas matrizes reais A existem tais que $A^3 - 3A = B$.

(a)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

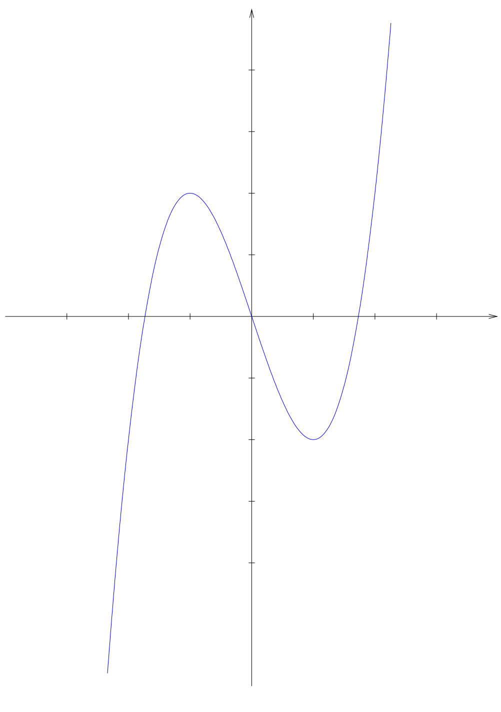
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solução:

Antes de mais nada vamos esboçar o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$.



Vemos que para $-2 < y < 2$ a equação $f(x) = y$ admite três soluções reais enquanto para $y < -2$ ou $y > 2$ ela admite uma solução real e duas complexas conjugadas.

(a) Os autovalores de B são 1 e -1 donde podemos escrever $B = XDX^{-1}$ para X inversível e

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sejam c_1, c_2, c_3 (resp. d_1, d_2, d_3) as soluções reais de $f(x) = 1$ (resp. $f(x) = -1$). Se $f(A) = B$ temos $f(X^{-1}AX) = D$ donde $X^{-1}AX$ é da forma

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} c_i & 0 \\ 0 & d_j \end{pmatrix}$$

para i, j escolhidos independentemente. Há portanto 9 matrizes reais A que satisfazem $f(A) = B$.

[Item (a): 3 pontos.]

(b) Sejam $z, \bar{z}$ as raízes complexas de $f(x) = 4$. Seja $v = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ um vetor linearmente independente com $\bar{v} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ e considere A unicamente definida por $Av = zv$, $A\bar{v} = \bar{z}\bar{v}$. Em outras palavras,

$$A = \begin{pmatrix} w_1 & \bar{w}_1 \\ w_2 & \bar{w}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \bar{w}_1 \\ w_2 & \bar{w}_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Para qualquer tal A temos $f(A) = 4I = B$. Temos além disso A real: há portanto infinitas matrizes reais A que satisfazem $f(A) = B$.

[Item (b): 4 pontos.]

(c) Se M é diagonalizável então $f(M)$ também o é. Como B não é diagonalizável então A também não o é. Assim A deve ter autovalor com multiplicidade algébrica igual a 2 logo o único autovalor de A é o único real c com $f(c) = 4$. Além disso qualquer autovetor de A é autovetor de B; como e_1 é (a menos de múltiplo escalar) o único autovetor de B então e_1 deve ser autovetor de A. Já e_2 deve ser autovetor generalizado, isto é, devemos ter $Ae_2 = ce_2 + ye_1$ (para algum real y). Assim

$$A = \begin{pmatrix} c & y \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$f(A) = A^3 - 3A = \begin{pmatrix} 4 & (3c^2 - 3)y \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e devemos ter $y = 1/(3c^2 - 3)$. Há portanto uma única solução.

[Item (c): 3 pontos.]