XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º. ou 9º. anos) (antigas 7ª. ou 8ª. séries)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) D	6) B	11) A	16) A	21) B
2) C	7) E	12) D	17) A	22) B
3) C	8) C	13) C	18) B	23) B
4) D	9) C	14) E	19) C ou D	24) B
5) C	10) D	15) E	20) C	25) E

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 2 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1. (D) Como EDC é isósceles, $\angle CED = \angle CDE = 80^\circ$. Como BEC é isósceles $\angle CBE = \angle BCE = \beta$. Usando ângulo externo, $\beta = 40^\circ$. Como ABE também é isósceles, $\angle BAE = \alpha$. Finalmente, usando mais uma vez ângulo externo podemos concluir que $\alpha = 50^\circ$.

2. (C) Os quadrados dos números são respectivamente: 99, 112, 125, 108 e 98. Destes, apenas o primeiro e o último são menores que o quadrado de 10 que é 100. Assim, os três números do meio são maiores que 10.

3. (C) $\sqrt{12^{12}} = 12^6 = (2^2 \cdot 3)^6 = 2^{12} \cdot 3^6$

4. (D) Seja P o número de funcionários que falam Português e I o número de funcionários que falam Inglês. É fácil ver que,

$$\frac{20}{100}.P + \frac{20}{100}.I = I \Rightarrow P = 4I.$$

Além disso, $4I + I - \frac{20}{100}.I = 84 \Rightarrow I = 20.$ Com isso, o número de funcionários que falam as duas línguas é $\frac{20}{100}.4I = 16.$

5. (C)

Edmilson	x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}+10$	$\frac{x}{2}+12$
Eduardo	y	$y+\frac{x}{4}$	$y+\frac{x}{4}+10$	$y+\frac{x}{4}+8$
Carlos	z	$z+\frac{x}{4}$	$z+\frac{x}{4}-20$	$z+\frac{x}{4}-20$

A quantidade final de cada é R$ 50,00, então $\frac{x}{2}+12 = 50$, então $x = 76.$ E com isso, Eduardo tinha inicialmente R$ 23,00.

6. (B) Sejam $a,b,c,d,e,f,g,h,i,$ os números ordenados assim:
$a>b>c>d>e>f>g>h>i.$

Então, $e=\dfrac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}\Rightarrow 9e=a+b+c+d+e+f+g+h+i.$ Além disso, $\dfrac{a+b+c+d+e}{5}=68\Rightarrow a+b+c+d+e=340,$ e também temos a seguinte equação, $\dfrac{e+f+g+h+i}{5}=44\Rightarrow e+f+g+h+i=220.$ Portanto, $9e+e=560\Rightarrow e=56.$ E assim, a soma desejada será 504.

7. (E) Quadradinhos de lado 1 existem 6 e quadradinho de lado 2 existe 1. Além disso, existem três outros inclinados de lado $\sqrt{2}$. Portanto, temos 10 quadrados.

8. (C) 2009 – Domingo 2012 – Quinta (Pois é ano Bissexto)
2010 – Segunda 2013 – Sexta
2011 – Terça 2014 – Sábado

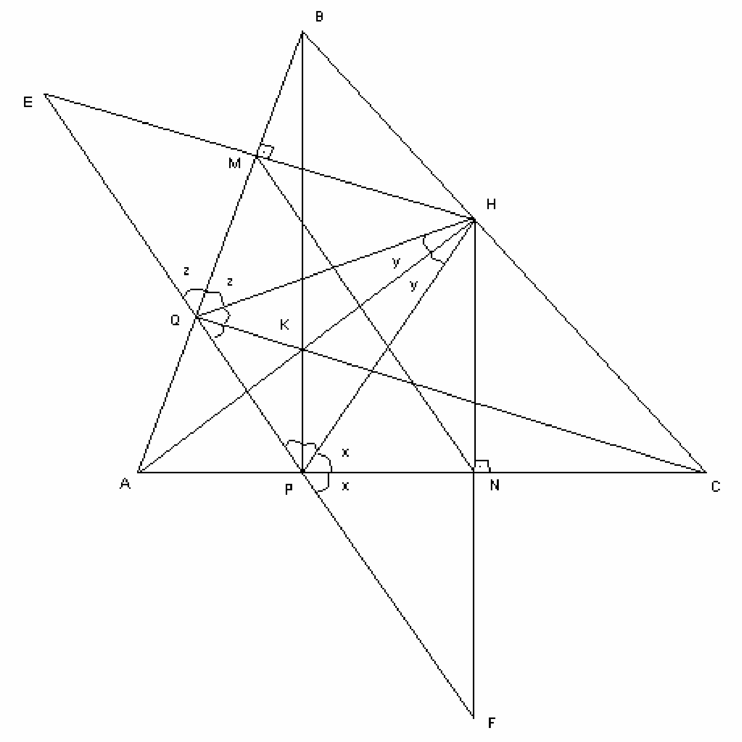
9. (C) O único número primo de dois algarismos iguais é 11. Neste caso, $a=1$. Usando agora a definição do sistema decimal:

$$11+10b+c+10c+b=121\Rightarrow 11(b+c)=110\Rightarrow b+c=10.$$

Como os números citados são primos, temos que b e c devem ser ímpares e diferentes de 5. Além disso, 91 é múltiplo de 7. Portanto, os valores para b e c são 3 e 7 respectivamente.

10) (D) Se a,b,c,d,e são cinco inteiros maiores que um, então $a,b,c,d,e\geq 2$, e com isso, a soma quaisquer quatro deles é pelo menos 8. Observando a equação $b(a+c+d+e)=155=5.31$, onde 5 e 31 são primos, temos que $b=5$ e $a+c+d+e=31$. Da mesma maneira, $c(a+b+d+e)=203$, então $c=7$ e $a+b+d+e=29$. Baseado nos resultados encontrados, concluímos que $a+d+e=24$, $a+b+c+d+e=36$ e da equação $a(b+c+d+e)=128$, obtemos que $a(36-a)=128$, ou seja, $a=4$ ou $a=32$. Porém, $a=32$ não poderá ser solução pois, caso fosse, teríamos $a+b+c+d+e\geq 40.$ Portanto, $a+b+c=16$ e a equação $e(a+b+c+d)=275$ será a mesma que $e(16+d)=275$, onde $d+e=36-a-b-c=20$. Como $275=11.25$ e $16+d\geq 18$, temos que $e=11$ e $d=25-16=9.$ Observe que outra fatoração de $275=5.55$ faria $d=39$, que é muito grande. Portanto, $a+b+c+d+e=4+5+7+9+11=36.$

11) (A) É fácil ver que os triângulos *EQH* e *HPF* são isósceles, logo *EQ* = *QH* = *b* e *HP* = *PF* = *c*. E seja *QP* = *a*. No triângulo *EHF*, temos que *EF* = 2*MN* (*MN* é base média). Logo *MN* = 5.



12. (D) Sejam p, q números primos, então para que o número de divisores inteiros e positivos seja exatamente 15, os número precisam ser da seguinte forma: p^{14} e $p^2.q^4$.
Assim teremos as seguintes possibilidades: $2^2.3^4 = 324$, $3^2.2^4 = 144$ e $5^2.2^4 = 400$.

13. (C) Entre os números 1 e 100 o algarismo 2 aparece dez vezes como dígito das dezenas e dez vezes como dígito das unidades. O mesmo ocorre com os algarismos 4, 6 e 8. Portanto, a soma pedida é

$$20 \cdot (2+4+6+8) = 400.$$

14) (E) Temos que $10x + 25y = 1000 \Rightarrow x = \dfrac{1000 - 25y}{10}$, onde x e y são, respectivamente, as quantidade de moedas de 10 centavos e de 25 centavos. Para que x seja um valor inteiro positivo basta que y seja qualquer número par entre 2 e 38. Logo, temos 19 maneiras diferentes.

15) (E) Devemos encontrar o maior valor possível para *a*, então determinaremos os maiores valores para *d*, *c* e *b*.
Tomando *d* = 39, observa-se que *c* < 156. Tomando *c* = 155, observa-se que *b* < 465. Tomando *b* = 464, *a* deverá ser menor que 928, e portanto, o maior valor possível de *a* será 927.

16. (A) A soma de todos os números é: $1 + 2 + \cdots + 49 = \dfrac{49 \cdot 50}{2} = 1225$
como temos sete colunas com a mesma soma, o resultado da soma dos elementos de uma mesma coluna é 1225/7 = 175.

17. (A) Temos que $y^2 - x^2 = 85^2 = 5^2.17^2$.
Temos, então, quatro possibilidades

$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=5^2.17^2 \end{cases}$, $\begin{cases} y-x=5 \\ y+x=5.17^2 \end{cases}$, $\begin{cases} y-x=17 \\ y+x=5^2.17 \end{cases}$, $\begin{cases} y-x=5^2 \\ y+x=17^2 \end{cases}$.

Resolvendo os sistemas temos:

x	3612	720	204	132
y	3613	725	221	157

O menor valor da soma $x+y$ é 289.

18. (B) Vamos chamar esse número de x. A soma de todos os números de três algarismo é

$$100+101+\cdots+999=\frac{1099\cdot 900}{2}=494550$$

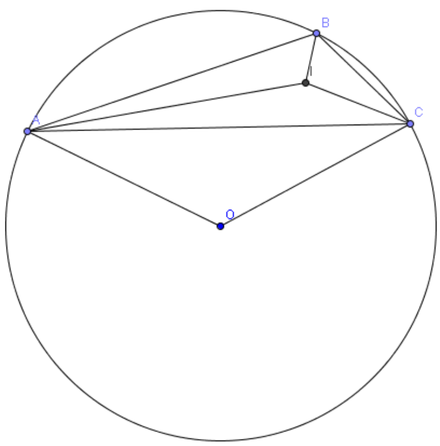
Assim, podemos montar a seguinte equação: $629x=494550-x \Rightarrow x=785$

19. (C) ou (D) ambas devem ser consideradas como resposta correta.

(C) Escolhendo uma cor para o quadrado do centro (como o azul do exemplo), sobram 4 cores diferentes para pintar cada uma das quatro partes restantes do desenho, cada parte com uma cor diferente, e isso pode ser feito de $\frac{4\times3\times2\times1}{4}=6$ maneiras de modo que não haja dois cartões pintados da mesma forma. Pode-se verificar que há 4 maneiras iguais de se pintar os cartões, pois ao serem giradas, obtém-se a mesma. Como há 5 maneiras de escolher uma cor para o quadrado do centro, Soninha conseguirá produzir $5\times6=30$ cartões diferentes.

(D) Se considerarmos que a diagonal com quadradinhos pretos é distinta da outra, então só precisamos dividir por 2. Logo Soninha conseguirá 60 cartões diferentes.

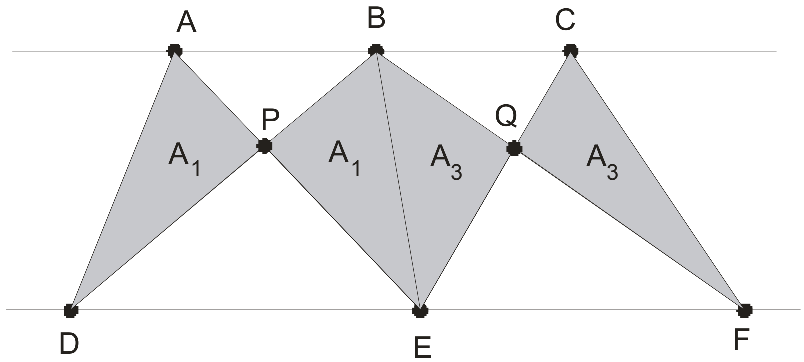
20. (C)



Como $\angle ABC = 110^o$, então $\angle AOC = 140^o$ e com isso $\angle OAC = 20^o$. Por outro lado, $\angle IAC = 10^o$. Portanto, $\angle IAO = 30^o$.

21. (B) Total de alunos: 40. Com isso, $\frac{60}{100}.40 = 24$ alunos. Como temos 22 alunos então pelo menos 2 alunas participarão do trabalho.

22. (B)



Seja P o ponto de interseção dos segmentos DB e AE; e Q o ponto de interseção de CE e BF. Note que os triângulos ADE e BDE possuem a mesma altura e a mesma base, logo possuem a mesma área. O mesmo ocorre com os triângulos BEF e CEF. Retirando as áreas comuns PDE e QEF, temos que $[ADP]=[PBE]$ e $[BEQ]=[QCF]$. Logo, $A_2 = A_1+A_3$.
Observação: $[XYZ]$ denota a área do triângulo XYZ.

23. (B) Como cada time joga três vezes, podemos concluir que:

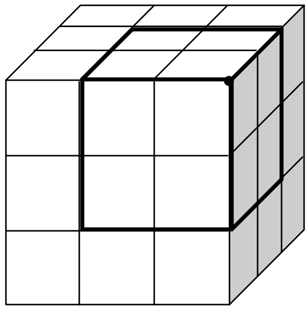
- Dinamarca perdeu todos os jogos.
- Camarões ganhou um jogo, empatou uma vez e perdeu o outro.
- Brasil ganhou um jogo e empatou outras duas vezes.
- Áustria ganhou dois jogos e empatou outro.

Assim, Brasil venceu a Dinamarca. Como o Brasil marcou apenas um gol, o único resultado possível para esse jogo é 1×0. Além disso, os outros jogos do Brasil foram empates, logo o resultado foi 0×0 em ambos. Da mesma forma, podemos concluir que o Camarões venceu a Dinamarca por 1×0. Ou seja, o único gol que a Dinamarca marcou deve ter sido contra a Áustria.
Por outro lado, sabemos que a Áustria venceu o Camarões e que o Camarões levou apenas um gol. Logo, o resultado desse jogo foi 1×0. Finalmente, como a Áustria marcou três gols, o jogo Áustria contra Dinamarca foi 2×1.

24. (B) Como AC é um número de dois algarismos então $AC = 10A + C$. Com isso, $4.(10A + C) = 24C$, e daí $C = 2A$.
Temos agora um novo tabuleiro
Agora, $4x = 24.\ 6C$, então $x = 36C$. Com isso, o produto mágico será $(6C)^3$. Fazendo $C = 2$, temos que o produto será 1728 e assim a soma será 18, mas se $C = 3$, a soma será 5832, que também terá soma 18. Para valores de C maiores ou iguais a 4 o número procurado terá mais que 4 algarismos.

	x	4
	$6C$	
	C	24

25. (E) Se o cubo tiver um vértice cujas três faces adjacentes são todas azuis, então estas faces conterão um total de 19 cubinhos com pelo menos uma face azul. Destes, devemos descontar os 7 cubinhos (do canto destacado) que não têm face vermelha. Neste caso, exatamente 19 – 7 = 12 cubinhos têm pelo menos uma face de cada cor.



Por outro lado, se o cubo não tiver três faces azuis incidindo num mesmo vértice, teremos duas faces opostas e uma face lateral azul, o mesmo acontecendo para as faces vermelhas. Neste caso, supondo que as faces superior, inferior e frontal sejam azuis, há 5 cubos que não possuem cor vermelha: os 3 cubos dos centros das faces azuis e os 2 cubos que dividem face com essas faces centrais. Como o mesmo ocorre para as faces vermelhas e há 26 cubos com pelo menos uma face pintada (de vermelho ou azul), neste caso há 26 − 5 − 5 = 16 cubos com pelo menos uma face de cada cor.