

**XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)**  
**GABARITO**

**GABARITO NÍVEL 3**

1) D	6) C	11) D	16) C	21) B
2) A	7) B	12) B	17) B	22) C
3) D	8) C	13) E	18) B	23) B
4) D	9) E	14) D	19) C	24) D
5) D	10) A ou B	15) C ou D	20) E	25) D

- Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).
- Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: [www.obm.org.br](http://www.obm.org.br)

1. (D) Como  $AE = BE = CE$ , então o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $B$ . Dessa forma, podemos escrever  $\alpha = 90^\circ - \beta$ . Como  $CE = CD$ , obtemos  $\angle CED = \angle CDE = 80^\circ$ . Logo, como  $\angle CED$  é ângulo externo ao triângulo  $BEC$  e  $\angle ECB = \angle EBC = \beta$ , concluímos que  $\angle CED = \beta + \beta \therefore 2\beta = 80^\circ \therefore \beta = 40^\circ$  e  $\alpha = 50^\circ$ . Portanto,  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{4}$ .

2. (A) Reescrevemos todos os números de modo que seus numeradores se tornem 1. Teremos  $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$  e

$\frac{x}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$ . Agora, o maior número é o que possui menor denominador. É imediato que dentre os

denominadores apresentados,  $x$  e  $x(x + 1)$  são os únicos menores que 1. Logo, o menor denominador é  $x$  e o maior dos números dados é  $\frac{1}{x}$ .

3. (D) Temos  $a - \frac{1}{a} = \frac{80}{9}$ , donde  $a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{6400}{81}$ , e logo

$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = \frac{6400}{81} + 4 = \frac{6724}{81} = \left(\frac{82}{9}\right)^2$ . Assim,  $a + \frac{1}{a} = \frac{82}{9}$ , pois  $a + \frac{1}{a} > 0$ .

4. (D) Seja  $P$  o número de funcionários que falam Português e  $I$  o número de funcionários que falam Inglês. É fácil ver que  $\frac{20}{100} \cdot P = \frac{80}{100} \cdot I \Rightarrow P = 4I$ .

Além disso,  $4I + I - \frac{80}{100} \cdot I = 84 \Rightarrow I = 20$ . Com isso, o número de funcionários que falam as duas línguas é

$$\frac{80}{100} \cdot I = 16.$$

5. (D) Note que todos os cartões deixam resto 3 na divisão por 5. Então, para que a soma dos cartões seja 100, que é múltiplo de 5, precisamos de pelo menos cinco cartões. Rafael pode escolher 3, 13, 23, 28 e 33, assim a resposta é 5.

6. (C) Sejam  $k$  a velocidade de Penha (em vértices por segundo) e  $t$  o tempo decorrido até o encontro entre Nelly e Sônia. Como Nelly gasta  $\frac{2}{4k}$  segundos até o segundo encontro, temos:

$$4kt + 2kt = n \quad \text{e} \quad 4k\left(t + \frac{2}{4k}\right) + k\left(t + \frac{2}{4k}\right) = n.$$

Dai  $kt = \frac{5}{2}$  e  $n = 15$ .

7. (B) Sejam  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ , os números ordenados assim:  $a > b > c > d > e > f > g > h > i$ .

Então,  $e = \frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9} \Rightarrow 9e = a+b+c+d+e+f+g+h+i$ . Além disso,

$\frac{a+b+c+d+e}{5} = 68 \Rightarrow a+b+c+d+e = 340$ , e também temos a seguinte equação,

$\frac{e+f+g+h+i}{5} = 44 \Rightarrow e+f+g+h+i = 220$ . Portanto, somando, obtemos  $9e + e = 560 \Rightarrow e = 56$ .

E assim, a soma desejada será  $9e = 504$ .

8. (C) É verdade que 14 de junho de 2008 é um sábado. Logo, 14 de junho de 2009 será um domingo, de 2010 será uma segunda-feira, de 2011 será uma terça-feira, de 2012 (que é bissexto) será uma quinta-feira, de 2013 será uma sexta-feira e, finalmente, de 2014 será um sábado. Portanto a próxima vez que o dia 14 de junho será num sábado acontecerá daqui a 6 anos.

9. (E) Temos que  $10x + 25y = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000 - 25y}{10}$ , onde  $x$  e  $y$  são, respectivamente, as quantidade de moedas de 10 centavos e de 25 centavos. Para que  $x$  seja um valor inteiro positivo basta que  $y$  seja qualquer número par entre 2 e 38. Logo, temos 19 maneiras diferentes.

10. (A) ou (B) ambas devem ser consideradas como resposta correta.

(A) Façamos  $n = 2^k \cdot b$ , com  $b$  ímpar. Seja  $d(m)$  a quantidade de divisores de  $m$ . Queremos resolver a equação  $d(n \cdot 2^n) = 2008 + d(n)$ .

Um divisor de  $n \cdot 2^n$  é um número da forma  $2^\alpha \cdot x$ , em que  $0 \leq \alpha \leq k + n$  e  $x$  é um divisor de  $b$ . há  $(k + n + 1)$  modos de escolhermos  $\alpha$  e  $d(b)$  modos de escolhermos  $x$ .

Logo,  $d(n \cdot 2^n) = (k + n + 1) \cdot d(b)$ . De modo análogo, cada divisor de  $n$  é da forma  $2^\beta \cdot y$ . Podemos escolher  $\beta$  de  $k + 1$  modos e escolher  $y$  de  $d(b)$  modos. Com isso, obtemos:

$$d(n \cdot 2^n) = (k + n + 1) \cdot d(b) = 2008 + d(n) = \mathbf{2008 + (k + 1) \cdot d(b)}.$$

Daí,  $n \cdot d(b) = 2008$ , de onde concluímos que  $n$  é um divisor de  $2008 = 2^3 \cdot 251$ . Além disso, como  $b$  é um divisor ímpar de  $n$ , devemos ter  $b = 1$  ou  $b = 251$  (pois os fatores primos de  $n$  estão dentre os de 2008).

• Se  $b = 1$ , ficamos com  $d(b) = 1$  e  $n = 2008$ . Neste caso,  $n = 2^3 \cdot 251^1$  possui  $4 \cdot 2 = 8$  divisores e  $n \cdot 2^n = 2^{2011} \cdot 251$ , que possui  $2012 \cdot 2 = 4024$  divisores, possuindo 4016 divisores a mais que  $n$  (absurdo).

• Se  $b = 251$ , obtemos  $d(b) = 2$  e  $n = 1004$ . Neste caso,  $n = 2^2 \cdot 251^1$  possui  $3 \cdot 2 = 6$  divisores e  $n \cdot 2^n = 2^{1006} \cdot 251$ , que possui  $1007 \cdot 2 = 2014$  divisores, possuindo 2008 divisores a mais que  $n$ .

Portanto,  $n = 1004$  e a soma de seus dígitos é  $1 + 4 = 5$ .

**(B)** Se considerarmos divisores negativos a argumentação segue:

$$2 \cdot d(n \cdot 2^n) = (k + n + 1) \cdot 2 \cdot d(b) = 2008 + 2 \cdot d(n) = 2008 + (k + 1) \cdot 2 \cdot d(b).$$

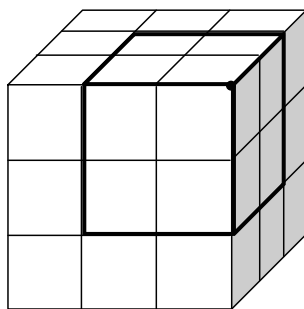
Daí,  $2 \cdot n \cdot d(b) = 2008$  e de modo análogo conseguimos  $n = 502$ .

**11. (D)** Observe que

$$371^4 - 41^4 = (371^2 + 41^2)(371^2 - 41^2) = (371^2 + 41^2)(371 + 41)(371 - 41) \\ (371^2 + 41^2) \cdot 412 \cdot 330.$$

Como  $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ , claramente este número é múltiplo de 2, 3, 5 e 11. Além disso, como 7 divide 371, claramente 7 não divide  $371^4 - 41^4$ .

**12. (B)** O cubo terá um vértice cujas três faces adjacentes são todas azuis. Estas faces contêm um total de 19 cubinhos com pelo menos uma face azul. Destes, devemos descontar os 7 cubinhos (do canto destacado) que não têm face vermelha. Logo, exatamente  $19 - 7 = 12$  cubinhos têm pelo menos uma face de cada cor.



**13. (E)** Seja  $f(x) = x^2 - 2$ . Temos  $f(b) = c$ ,  $f(a) = c$  e  $f(c) = a$ .

Assim, queremos determinar o número de soluções reais de  $f(f(f(x))) = x$ . Se

$$|x| > 2, f(x) = x^2 - 2 = |x|^2 - 2 > |x| \geq x \text{ (pois } |x|^2 - |x| - 2 = (|x| - 2)(|x| + 1) > 0).$$

Assim, não há solução real com  $|x| > 2$ .

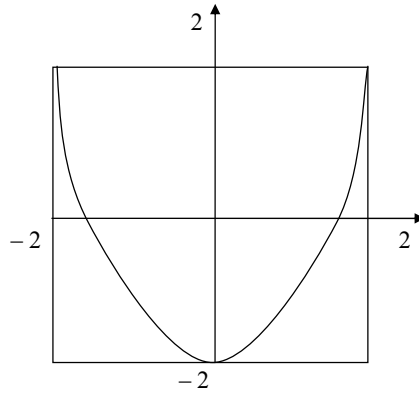
Se  $x \in [-2, 2]$ , podemos escrever  $x = 2 \cos \theta$ , para algum  $\theta \in [0, \pi]$ . Nesse caso,

$f(x) = 4 \cos^2 \theta - 2 = 2 \cos 2\theta$ ,  $f(f(x)) = 2 \cos 4\theta$  e  $f(f(f(x))) = 2 \cos 8\theta$ . Queremos então contar o número

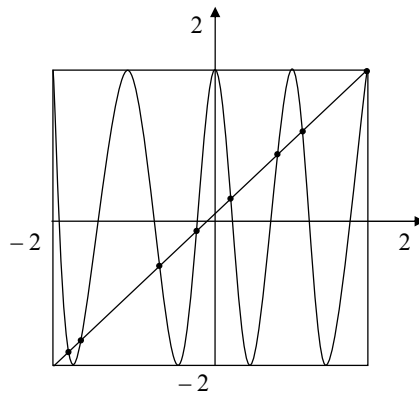
de soluções reais de  $\cos 8\theta = \cos \theta$ , as quais vêm de  $8\theta = \theta + 2k\pi$ ,  $0 \leq k \leq 3 \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$ ,

o que dá 4 soluções e de  $8\theta = 2k\pi - \theta$ ,  $1 \leq k \leq 4 \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{9} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right)$ , o que dá mais 4 soluções.

Obs. O gráfico de  $f(x)$  para  $x \in [-2, 2]$  é da forma



Assim, os gráficos de  $f(f(f(x)))$  e da reta  $y = x$  são como abaixo, donde se conclui que a equação  $f(f(f(x))) = x$  tem 8 soluções reais.



**14. (D)** Vamos contar o número de distribuições em que Arnaldo não recebe nenhuma carta de espadas. Como há 39 cartas não-espada, temos  $\binom{39}{13}$  modos de escolhermos as cartas de Arnaldo. Depois disso, temos também  $\binom{39}{13}$  modos de escolhermos as cartas de Bernaldo (as cartas dele podem ser de espadas) e  $\binom{26}{13}$  modos de escolhermos as cartas de Cernaldo. Por último, só teremos 1 maneira de escolhermos as cartas de Dernaldo (ele ficará com as cartas que sobraram). Logo, há  $\binom{39}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot 1$  distribuições em que Arnaldo não recebe cartas de espadas. De modo análogo, contando as distribuições em que nem Arnaldo nem Bernaldo recebem cartas de espadas, obtemos um total de  $\binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot 1$  distribuições. Logo, a probabilidade é:

$$\frac{\binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot 1}{\binom{39}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot 1} = \frac{\binom{26}{13}}{\binom{39}{13}} = \frac{26!}{13!13!} = \frac{26!26!}{39!13!}.$$

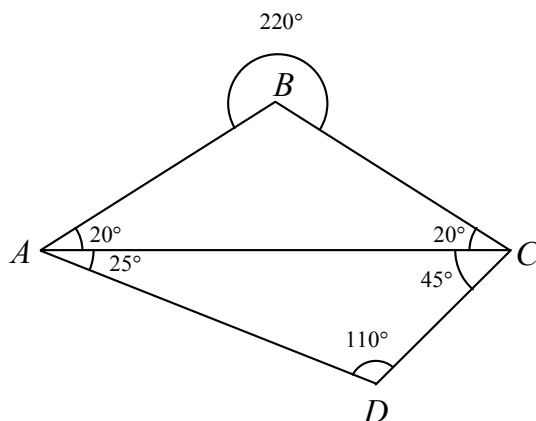
**15. (C) ou (D) ambas devem ser consideradas como resposta correta.**

(C) Escolhendo uma cor para o quadrado do centro (como o azul do exemplo), sobram 4 cores diferentes para pintar cada uma das quatro partes restantes do desenho, cada parte com uma cor diferente, e isso pode ser feito de  $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4} = 6$  maneiras de modo que não haja dois cartões pintados da mesma forma. Pode-se verificar que há 4 maneiras iguais de se pintar os cartões, pois ao serem giradas, obtém-se a mesma. Como há 5 maneiras de escolher uma cor para o quadrado do centro, Soninha conseguirá produzir  $5 \times 6 = 30$  cartões diferentes.

(D) Se considerarmos que a diagonal com quadradinhos pretos é distinta da outra, então só precisamos dividir por 2. Logo Soninha conseguirá 60 cartões diferentes.

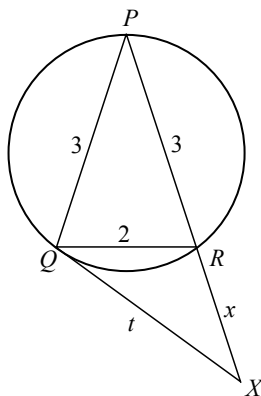
**16. (C)** Temos  $AB = BC$  e o ângulo exterior  $\angle ABC$  é igual a  $2 \cdot \angle ADC$ . Isso implica que o ponto  $B$  é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo  $ADC$ . Dessa forma,

$$\angle DBC = 2 \cdot \angle DAC = 50^\circ.$$

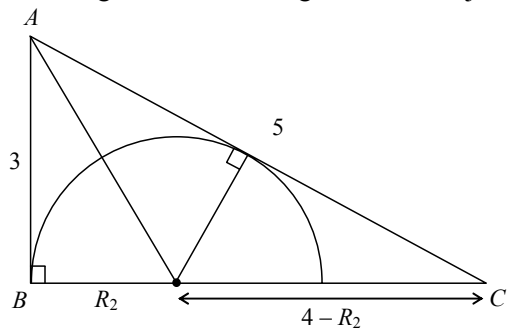


**17. (B)** Sejam  $XR = x$  e  $XQ = t$ . Veja que  $\angle XQR = \angle QPR = \frac{1}{2} \cdot (\text{arco } QR)$ . Portanto, os triângulos  $XRQ$  e  $XQP$  são semelhantes. Escrevendo a razão de semelhança para esses triângulos, obtemos:  $\frac{x}{t} = \frac{t}{x+3} = \frac{2}{3}$ .

Daí,  $\frac{x}{t} \cdot \frac{t}{x+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \therefore \frac{x}{x+3} = \frac{4}{9} \therefore x = \frac{12}{5}$ .



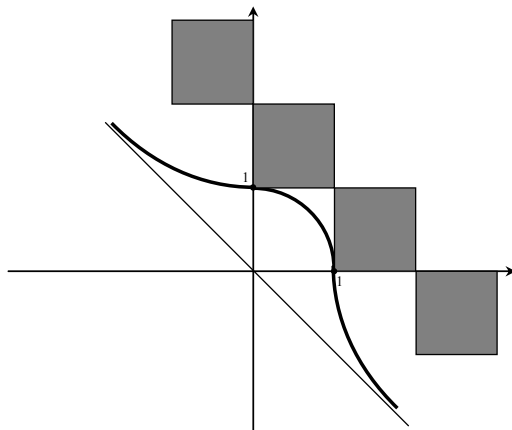
18. (B) Inicialmente, observe que o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $B$ . Veja figura a seguir.



Veja que o centro da circunferência de raio  $R_2$  está sobre a bissetriz interna do ângulo  $A$ . Logo, pelo teorema da bissetriz interna, temos  $\frac{R_2}{3} = \frac{4 - R_2}{5}$ , de onde obtemos  $R_2 = \frac{3}{2}$ . Por outro lado, a área de  $ABC$  é dada por  $p \cdot R_1$ , em que  $p$  é o semi-perímetro. Daí, segue-se que  $\frac{3 + 4 + 5}{2} \cdot R_1 = \frac{3 \cdot 4}{2}$ , de modo que  $R_1 = 1$ . Portanto,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}.$$

19. (C) Graficamente, podemos representar cada uma das equações dadas, obtendo exatamente duas soluções em comum.



**Solução algébrica:**

Se  $x < 0$  e  $y < 0$  temos  $x \cdot |x| < 0$  e  $y \cdot |y| < 0$ , de modo que  $x \cdot |x| + y \cdot |y| < 0$  e não há soluções.

Se  $x < 0$  e  $y > 0$  temos  $x \cdot |x| + y \cdot |y| = -x^2 + y^2 = (y - x)(y + x) = 1$ . Como  $y - x > 0$ , temos  $x + y > 0$ ; considerando ainda que  $y - x > y + x$ , temos  $(x + y)^2 < (x + y)(y - x) = 1 \Rightarrow x + y < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < 1$  e novamente não há soluções. Por simetria, se  $x > 0$  e  $y < 0$ , também não temos soluções.

Se  $x > 0$  e  $y > 0$  temos  $x \cdot |x| + y \cdot |y| = x^2 + y^2 = 1$ , o que implica  $0 < x < 1$  e  $0 < y < 1$ , de modo que  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 0$  e novamente não temos soluções.

Finalmente, falta considerar o caso em que  $x$  ou  $y$  é igual a zero. Substituindo  $x$  por zero, obtemos das duas equações que  $y = 1$ ; analogamente, obtemos a solução  $(1, 0)$ .

Deste modo, o sistema admite duas soluções:  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

20. (E) Seja  $abcd$  um número paladino. Temos 9 possibilidades para escolhermos o dígito  $a$ , 9 para escolhermos  $b$  e 9 para escolhermos  $c$ . Uma vez escolhidos esses dígitos, devemos escolher o dígito  $d$  de modo que o número formado seja múltiplo de 9. Mas, só haverá um modo de escolhermos  $d$ : se  $a + b + c$  deixar resto  $r$  na divisão por 9 (com  $0 \leq r \leq 8$ ), devemos escolher  $d = 9 - r$ . Logo, a quantidade de números paladinos é  $9 \times 9 \times 9 \times 1 = 729$ .

21. (B) Veja que  $f(f(x)) = \frac{c \cdot \frac{cx}{2x+3}}{2 \cdot \frac{cx}{2x+3} + 3} = \frac{c^2x}{(2c+6)x+9} = x$  se, e somente se,  $c^2x = (2c+6)x^2 + 9x$ . Daí,

devemos ter  $c^2 = 9$  e  $2c + 6 = 0$ , o que nos dá a única solução  $c = -3$ .

22) (C) Sejam  $V$  o volume do cone e  $v$  o volume da areia, indicado na figura 1. Fazendo semelhança entre os dois cones, de alturas 3 cm e 5 cm, obtemos  $\frac{v}{V} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$ . Na figura 2, temos semelhança entre dois cones, de alturas  $(5-h)$  cm e 5 cm, e volumes  $V-v$  e  $V$ , respectivamente. Temos:

$$\left(\frac{5-h}{5}\right)^3 = \frac{V-v}{V} = 1 - \frac{v}{V} = \frac{98}{125} \therefore \frac{5-h}{5} = \frac{\sqrt[3]{98}}{5} \therefore h = 5 - \sqrt[3]{98}.$$

23. (B) Como  $AC$  é um número de dois algarismos então  $AC = 10A + C$ . Com isso,  $4 \cdot (10A + C) = 24C$ , e daí  $C = 2A$ . Em particular  $C$  é par. Temos agora um novo tabuleiro

	<b>X</b>	<b>4</b>
	<b>6C</b>	
	<b>C</b>	<b>24</b>

Agora,  $4X = 24$ .  $6C$ , então  $X = 36C$ . Com isso, o produto mágico será  $(6C)^3$ . Fazendo  $C = 2$ , temos que o produto será 1728 e assim a soma será 18. Note que nesse caso  $A = 1 = C/2$ . Para valores de  $C$  maiores ou iguais a 4 o número procurado terá mais que 4 algarismos.

O único quadrado mágico que satisfaz as condições do enunciado é:

<b>6</b>	<b>72</b>	<b>4</b>
<b>8</b>	<b>12</b>	<b>18</b>
<b>36</b>	<b>2</b>	<b>24</b>

24) (D) Formaremos a fila da seguinte maneira: inicialmente, posicionamos a pessoa mais alta. Então, a segunda pessoa poderá ocupar qualquer um dos dois lados em relação à primeira pessoa, de modo que há 2 modos da segunda pessoa ser posicionada. A terceira pessoa mais alta pode ser colocada em ambos os lados da fila então formada, tendo também 2 modos de entrar na fila. De um modo geral, cada pessoa terá dois modos de se posicionar na fila, escolhendo uma das duas extremidades. O total de posicionamentos feitos dessa forma é  $1 \times 2^9 = 512$ .

25. (D) Se  $a, b, c, d, e$  são cinco inteiros maiores que um, então  $a, b, c, d, e \geq 2$ , e com isso, a soma de quaisquer quatro deles é pelo menos 8. Observando a equação  $b(a+c+d+e) = 155 = 5 \cdot 31$ , onde 5 e 31 são primos, temos que  $b = 5$  e  $a+c+d+e = 31$ . Portanto,  $a+b+c+d+e = 31+5 = 36$ .

Obs. Note que  $a = 4, b = 5, c = 7, d = 9$  e  $e = 11$  é solução do sistema.