XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Primeira Fase

Soluções Nível Universitário – Primeira Fase

PROBLEMA 1

a) A derivada da função f é $f'(x) = \frac{1}{e} \cdot e^{(x/e)} - 1,$ que se anula apenas para $x = e$, sendo negativa para $x < e$ e positiva para $x > e$. Assim, o valor mínimo de f é $f(e) = 0$.

b) Pelo resultado do item anterior, como $\pi \neq e$ temos que $f(\pi) > 0,$ logo $e^{(\pi/e)} > \pi,$ ou seja, $e^{(\pi)} > \pi^e$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Item a) **[7 pontos]**

Calcular corretamente a derivada da função f. **[+ 3 pontos]**
Estabelecer que a derivada se anula apenas para $x = e$. **[+ 1 ponto]**
Provar que $x = e$ é de fato ponto de mínimo absoluto por qualquer método correto, como por exemplo analisar o sinal da derivada. (A segunda derivada ser positiva em $x = e$ indica apenas mínimo *local,* sendo necessário algum argumento adicional, como o fato de o domínio ser toda a reta real e não haver outros pontos críticos). **[+ 3 pontos]**

Pequenos erros de conta **[– 1 ponto]**

Item b) **[3 pontos]**
Provar que $e^{\pi} > \pi^e$. **[+ 3 pontos]**
Resposta correta sem demonstração **[0 ponto]**

PROBLEMA 2

Um polinômio que satisfaz as condições do enunciado é $p(x) = x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 z_2$.

$$z_1 + z_2 = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 = -1 + \frac{\zeta^7 - 1}{\zeta - 1} = -1.$$

$z_1 z_2 = \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^5 + \zeta^7 + \zeta^8 + \zeta^7 + \zeta^9 + \zeta^{10} = 3 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 = 2.$
Logo $p(x) = x^2 + x + 2$ e $p(3) = 14$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Obter uma fórmula para $p(x)$ em função de z_1 e z_2. **[+2 pontos]**
Calcular $z_1 + z_2$ **[+3 pontos]**
Calcular $z_1 z_2$ **[+4 pontos]**
Calcular $p(3)$. **[+1 ponto]**

PROBLEMA 3

a) Sejam A, B, e C os vértices do triângulo no sentido anti-horário. Seja Q_n (resp. R_n) a probabilidade de, após n saltos, Dõ estar no vértice B (resp. C).

Temos $P_0 = 1, Q_0 = R_0 = 0$ e, para todo $n \geq 0$,

$$(*) \begin{cases} P_{n+1} = (1-p)R_n + pQ_n \\ Q_{n+1} = (1-p)P_n + pR_n \\ R_{n+1} = (1-p)Q_n + pP_n \end{cases}$$

[1 ponto]

Dado n natural, seja $D_n = max\{|P_n - Q_n|, |Q_n - R_n|, |R_n - P_n|\}$. Vamos provar que, para todo n, $D_{n+1} \leq max\{p, 1-p\}. D_n$. Dado n, há 6 possibilidades para a ordem dos números P_n, Q_n, R_n. Vamos analisar o caso $P_n \leq Q_n \leq R_n$ (os outros 5 casos são análogos). Nesse caso, a maior distância D_n entre dois dos números P_n, Q_n e R_n é $R_n - P_n$. De (*), obtemos:

$|P_{n+1} - Q_{n+1}| = |(1-p)(R_n - P_n) + p(Q_n - R_n)| \leq max\{(1-p)(R_n - P_n), p(R_n - Q_n)\}$,

$\leq max\{1-p, p\}. D_n$, pois $R_n - P_n$ e $Q_n - R_n$ têm sinais contrários.

$|Q_{n+1} - R_{n+1}| = |(1-p)(P_n - Q_n) + p(R_n - P_n)| \leq max\{(1-p)(Q_n - P_n), p(R_n - P_n)\}$

$\leq max\{p, 1-p\} \cdot D_n$, pois $P_n - Q_n$ e $R_n - P_n$ têm sinais contrários.

$|R_{n+1} - P_{n+1}| = |(1-p)(Q_n - R_n) + p(P_n - Q_n)| = (1-p)(R_n - Q_n) + p(Q_n - P_n) \leq$

$\leq max\{p, 1-p\} \cdot (R_n - Q_n + Q_n - P_n) = max\{p, 1-p\} \cdot (R_n - P_n) = max\{p, 1-p\} \cdot D_n$.

Assim, $D_{n+1} = max\{|P_{n+1} - Q_{n+1}|, |Q_{n+1} - R_{n+1}|, |R_{n+1} - P_{n+1}|\} \leq max\{p, 1-p\} \cdot D_n$, para todo $n \geq 0$, donde $D_n \leq (max\{p, 1-p\})^n$, $\forall n \geq 0$.

Como

$P_n + Q_n + R_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left|P_n - \frac{1}{3}\right| = \left|P_n - \frac{P_n + Q_n + R_n}{3}\right| = \left|\frac{(P_n - Q_n) + (P_n - R_n)}{3}\right| \leq \frac{2D_n}{3} \leq \frac{2}{3} \cdot (max\{p, 1-p\})^n, \forall n \geq 0.$$

Como $0 < max\{p, 1-p\} < 1$, segue imediatamente que $\lim\limits_{n \to \infty} \left|P_n - \frac{1}{3}\right| = 0$, e que $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = \frac{1}{3}$.

[+3 pontos]

b) Para $p = 0$ teríamos $P_n = 1$ quando n é múltiplo de 3 e $P_n = 0$ caso contrário **[1 ponto]**.

Por outro lado, tomando $p = 1/100$, temos $\lim\limits_{k \to \infty} P_{3k+1} = 1/3$. Em particular, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $P_{3r+1} > \frac{1}{\pi}$, pois $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$. **[+ 2 pontos]**

Considerando $P_{3r+1} = P_{3r+1}(p)$ como função de p, temos que $P_{3r+1}(p)$ é um polinômio (de grau no máximo $3r + 1$) em p, e portanto depende continuamente de p. Como $P_{3r+1}(0) = 0$ e $P_{3r+1}\left(\frac{1}{100}\right) > \frac{1}{\pi}$, existe, pelo teorema do valor intermediário, p com $0 < p < \frac{1}{100}$ tal que $P_{3r+1}(p) = \frac{1}{\pi}$. **[+ 4 pontos]**

Solução alternativa para o item a):

Podemos (Como no início da solução anterior), escrever

$$\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \\ R_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \\ R_n \end{pmatrix}, \forall n \geq 0.$$ **[1 ponto]**

Os autovalores dessa matriz 3×3 são 1 e $-\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3} \cdot \left(\frac{2p-1}{2}\right)$.

As normas dos autovalores distintos de 1 são iguais a $1-3p(1-p) < 1$, donde P_n, Q_n e R_n convergem a certos números, que denotaremos por x, y, z, respectivamente.
[+2 pontos]

Devemos então ter:
$x = (1-p)z + py, y = (1-p)x + pz, z = (1-p)y + px,$ donde
$x = (1-p)z + p((1-p)x + pz) \Rightarrow (1-p+p^2)x = (1-p+p^2)z \Rightarrow x = z \Rightarrow y = (1-p)x + px = x,$
e logo $x = y = z = 1/3$ (pois $x + y + z = 1$). **[+ 1 ponto]**

PROBLEMA 4

Pelo pequeno teorema de Fermat, $3^{30} \equiv 1(mod\, 31)$, e logo $(3^n(mod\, 31))$ é periódico com período divisor de 30. **[1 ponto]**
Por outro lado, obviamente $(n(mod\, 31))$ é periódico com período 31. **[+1 ponto]**
Portanto, $(3^n + n(mod\, 31))$ é periódico com período divisor de $31 \cdot 30 = 930$. **[+2 pontos]**
Pelo teorema chinês dos restos, para cada a com $0 \leq a \leq 29$ e b com $0 \leq b \leq 30$, existe um único $c(a,b)$ com $0 \leq c(a,b) \leq 929$ tal que $c(a,b) \equiv a(mod\, 30)$ e $c(a,b) \equiv b(mod\, 31)$. Temos $3^{c(a,b)} + c(a,b) \equiv 3^a + b(mod\, 31)$. **[+3 pontos]**
Fixando a e fazendo b variar, $3^a + b$ percorre todas as 31 classes (mod 31).
Assim, $3^m + m, 0 \leq m \leq 929$ passa 30 vezes por cada classe (mod 31). Como $930 = 31 \cdot 30 | 31!$, $3^n + n \equiv 0(mod\, 31)$ para 31!/31 = 30! inteiros positivos menores ou iguais a 31!. **[+3 pontos]**

PROBLEMA 5

1ª. Solução

Se x é uma raiz quarta da unidade, temos
$xf(x) = d + ax + bx^2 + cx^3, x^2 f(x) = c + dx + ax^2 + bx^3$ e $x^3 f(x) = b + cx + dx^2 + ax^3$, de modo que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ xf(x) \\ x^2 f(x) \\ x^3 f(x) \end{pmatrix} = f(x) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Assim, o vetor $(1, x, x^2, x^3)$ é autovetor de A, com autovalor $f(x)$, para $x = 1, i, -1, -i$.
deduzimos que A possui 4 autovetores independentes e, portanto, det A é o produto dos respectivos autovalores, ou seja, $det\, A = f(1) f(i) f(-1) f(-i)$.

2ª. Solução

Observamos que det A é um polinômio do quarto grau nas variáveis a, b, c, d, enquanto $f(1)$, $f(i)$, $f(-1)$, $f(-i)$ são polinômios irredutíveis distintos do primeiro grau nessas mesmas variáveis. Podemos realizar operações lineares nas linhas de A para provar que o polinômio det A é divisível por $f(1)$, $f(i)$, $f(-1)$, $f(-i)$. Isto fica mais rápido utilizando a mesma ideia da primeira Solução: se x é raiz quarta da unidade, multiplicando a segunda coluna por x, a terceira por x^2 e a quarta por x^3 e somando tudo isso à primeira coluna, obtemos $\left(f(x), xf(x), x^2 f(x), x^3 f(x)\right)$.

Assim, temos $\det A = kf(1)f(i)f(-1)f(-i)$, onde k é uma constante a ser determinada. Fazendo $a = 1$ e $b = c = d = 0$, obtemos det $A = 1$ e $f(1)f(i)f(-1)f(-i) = 1$, logo $k = 1$, como queríamos demonstrar.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

1ª. Solução
Encontrar os autovalores de A **[+4 pontos] (1 ponto para cada)**
Provar que $f(1), f(i), f(-1), f(-i)$ são autovalores de A **[+4 pontos] (1 ponto para cada)**
Concluir a demonstração **[+2 pontos]**

2ª. Solução
Provar que $f(1)$ e $f(-1)$ são fatores de det A **[+2 pontos] (1 ponto para cada)**
Provar que $f(i)$ e $f(-i)$ são fatores de det A **[+4 pontos] (2 pontos para cada)**
Provar que $\det A = kf(1)f(i)f(-1)f(-i)$, para alguma constante k. **[+2 pontos]**
Concluir a demonstração (provar que $k = 1$) **[+2 pontos]**

Outras soluções
Há muitas outras formas de resolver este problema. Soluções que não relacionem a matriz A com as raízes quartas da unidade, como, por exemplo, calcular diretamente det A e $f(1)f(i)f(-1)f(-i)$ em função de a, b, c, d, tendem a ser mais trabalhosas. Uma tentativa deste tipo só deve receber pontuação parcial caso o erro tenha ocorrido bem ao final das contas, em cujo caso devem ser descontados, no máximo, 2 pontos. Tentativas com muitos erros de conta ou com erros no início ou no meio da solução que comprometam significativamente o resultado não devem receber pontuação alguma.

PROBLEMA 6

Defina

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Então

$$\left(f(x)\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} a_l a_{n-l}\right)x^n$$
$$= \left(a_0 a_0\right) + \left(a_0 a_1 + a_1 a_0\right)x + \ldots$$
$$+\left(a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \ldots + a_n a_0\right)x^n + \ldots$$

e

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$
$$= a_1 + 2a_2 x + \ldots + (n+1)a_{n+1}x^n + \ldots$$

Pela condição do enunciado, os coeficientes de $f'(x)$ e de $\frac{\pi}{3}(f(x))^2$ coincidem, exceto pelo coeficiente constante. Temos portanto $f'(x)-\frac{\pi}{3}(f(x))^2=\frac{\pi}{3}$. Logo temos

$$\frac{df}{dx}=\frac{\pi}{3}(f^2+1)\Leftrightarrow\int\frac{df}{f^2+1}=\frac{\pi}{3}\int dx\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow arctg\,f=\frac{\pi}{3}(x+C)\Rightarrow f(x)=tg\left(\frac{\pi}{3}(x+C)\right)$$

Como $f(0)=a_0=0$, concluímos que $C = 0$, e portanto

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}=f\left(\frac{1}{2}\right)=tg\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Interpretar a sequência a_k como os coeficientes de Taylor de uma função. **[+2 pontos]**
Achar a equação diferencial satisfeita por $f(x)$. **[+4 pontos]**
Encontrar $f(x)$. **[+3 pontos]**
Calcular $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}$. **[+1 ponto]**