Problema 1

Sejam α, β, γ as três raízes do polinômio. As relações de Girard implicam que $s = \alpha + \beta + \gamma = 0$ e $p = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -13$, logo $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = s^2 - 2p = 26$.

As únicas possibilidades para $\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\}$ são, portanto, $\{5, 1, 0\}$ e $\{4, 3, 1\}$. Como $s = 0$, só há duas possibilidades para (α, β, γ): $(+4, -3, -1)$ ou $(-4, +3, +1)$. Logo $n = -\alpha\beta\gamma = \pm 12$.

Problema 2

Primeira Solução

Sejam $A = (0, 0, a)$, $B = (1 + b, 2, 0)$, $C = (1, 1 + c, 1)$ e $D = (1 + d, d, d)$ pontos genéricos, um sobre cada uma das 4 retas dadas. Esses pontos são colineares se, e somente se, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 1+b & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 & 1 \\ 1+d & d & d & 1 \end{bmatrix}$$

tem posto 2. Subtraindo a primeira linha de M das demais obtemos a matriz equivalente

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 1+b & 2 & -a & 0 \\ 1 & 1+c & 1-a & 0 \\ 1+d & d & d-a & 0 \end{bmatrix},$$

que tem posto 2 se, e somente se

$$1 + b = \frac{2}{1+c} = \frac{-a}{1-a} \quad \text{e} \quad 1 + d = \frac{d}{1+c} = \frac{d-a}{1-a}.$$

Três dessas quatro igualdades nos permitem expressar b, c e d em função de a: $b = \dfrac{1}{a-1}$, $c = \dfrac{a-2}{a}$, $d = \dfrac{1}{a}$; a quarta, então, equivale a $2a^2 - a - 2 = 0$, equação que possui duas soluções reais. Logo há duas retas que intersectam simultaneamente as 4 retas dadas.

Segunda Solução

As coordenadas de Plücker das quatro retas são:

$$\begin{aligned} r_1 &: \langle 0,0,1|0,0,0\rangle \\ r_2 &: \langle 1,0,0|0,0,-2\rangle \\ r_3 &: \langle 0,1,0|-1,0,1\rangle \\ r_4 &: \langle 1,1,1|0,-1,1\rangle \end{aligned}$$

Qualquer solução $r : \langle d_x, d_y, d_z | p_x, p_y, p_z\rangle$ tem que ser ortogonal às quatro retas. Resolvendo o sistema linear, temos que $r : \langle 2\alpha, \beta-\alpha, 0|\beta, 2\alpha+\beta, \alpha\rangle$; finalmente, como $r_d \cdot r_p = 0$, temos que ter

$$\beta^2 + 3\alpha\beta - 2\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

logo existem duas retas que intersectam as quatro retas dadas.

Problema 3

Cada movimento de subida ($\uparrow$) deve ser compensado por um movimento de descida ($\downarrow$), e cada movimento para a esquerda ($\leftarrow$) deve ser compensado por um movimento para a direita ($\rightarrow$). Assim, se fizermos k movimentos $\uparrow$, temos que fazer também k movimentos $\downarrow$, $1004-k$ movimentos $\leftarrow$ e $1004-k$ movimentos $\rightarrow$. Para cada k, o número de caminhos é, portanto, igual ao número de anagramas com 4 letras distintas, duas aparecendo k vezes e as outras duas, $1004-k$ vezes cada. Logo a resposta é

$$\begin{aligned} R &= \sum_{k=0}^{1004} \frac{2008!}{k!k!(1004-k)!(1004-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{1004} \frac{2008!}{1004!1004!} \cdot \frac{1004!1004!}{k!k!(1004-k)!(1004-k)!} \\ &= \binom{2008}{1004} \sum_{k=0}^{1004} \binom{1004}{k}^2 . \end{aligned}$$

Considere agora um conjunto de n meninos e n meninas. De quantas maneiras podemos escolher um grupo de n crianças? Por um lado, a resposta é $\binom{2n}{n}$. Por outro lado, se escolhermos k meninos, temos $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ maneiras de formar um grupo. Logo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

e portanto

$$R = \binom{2008}{1004}^2.$$

Segunda Solução

Esmeralda tem $\binom{2008}{1004}^2$ maneiras de escolher dois conjuntos de 1004 passos dentre os 2008 passos que andará: o conjunto X dos passos para cima ou para a direita ($\uparrow$ ou $\rightarrow$) e o conjunto Y dos passos para baixo ou para a direita ($\downarrow$ ou $\rightarrow$). Essas escolhas determinam unicamente todos os passos: O conjunto dos passos para a direita será $X \bigcap Y$, para a esquerda será $X^c \cap Y^c$, para cima $X \cap Y^c$ e para baixo $X^c \cap Y$ (onde X^c e Y^c denotam os complementares de X e Y, respectivamente). Se $|X \cap Y| = k$, teremos $|X^c \cap Y| = 1004 - k$, $|X \cap Y^c| = 1004 - k$ e $|X^c \cap Y^c| = k$. Assim, a resposta é $\binom{2008}{1004}^2$.

Problema 4

Note que $B^4 = (B^2)^2 = (ABA^{-1})^2 = AB^2A^{-1} = A(ABA^{-1})A^{-1} = A^2BA^{-2}$. De forma análoga, $B^8 = A^3BA^{-3}$, $B^{16} = A^4BA^{-4}$, $B^{32} = A^5BA^{-5}$, $B^{64} = A^6BA^{-6}$, $B^{128} = A^7BA^{-7} = B$, logo $B^{127} = I$.

Suponha agora que existe $0 < k < 127$ tal que $B^k = I$; como 127 é primo, o m.d.c. entre 127 e k vale 1. Pelo Teorema de Bézout, existem a, b inteiros tais que $127a + kb = 1$; então

$$B = B^1 = B^{127a+kb} = (B^{127})^a \cdot (B^k)^b = I.$$

Isso é uma contradição, pois $B \neq I$. Logo o menor valor de k é 127.

Nota: Não é necessário exibir exemplos de tais matrizes A e B, mas tais exemplos existem. Podemos fazer $n = 127$, enumerar uma base de $\mathbb{R}^{127}$ como

$\{e_0, e_1, \cdots, e_{126}\}$ e definir A e B por $Ae_j = e_{2j \pmod{127}}$ e $Be_j = e_{2j+1 \pmod{127}}$, $0 \leq j \leq 126$.

Problema 5

Como toda hipérbole tem duas assíntotas não paralelas, dadas duas hipérboles, sempre existe pelo menos um ponto comum a uma assíntota de cada uma delas. Esse ponto não é coberto por qualquer uma das duas hipérboles, logo é impossível cobrir todo o plano com apenas duas hipérboles.
As seguintes três hipérboles cobrem todo o plano:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 \\ (y-2)^2 - x^2 &= 1 \\ (y+2)^2 - x^2 &= 1 \end{aligned}$$

De fato, para qualquer $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, vale pelo menos das seguintes desigualdades: $x^2 > y^2 + 1$, $x^2 < (y-2)^2 - 1$ ou $x^2 < (y+2)^2 - 1$. Com efeito, $\max\{(y-2)^2 - 1, \quad (y+2)^2 - 1\} = (|y| + 2)^2 - 1 = y^2 + 4|y| + 3 > y^2 + 1$.
Assim, o número mínimo de hipérboles necessárias para cobrir todos os pontos do plano é 3.

Problema 6

Observe inicialmente que

$$\frac{\pi}{n}(P_n - 1) < \int_0^\pi \operatorname{sen}^n x dx < \frac{\pi}{n}(P_n + 1).$$

Defina $I_n = \int_0^\pi \operatorname{sen}^n x dx$. Integrando por partes, temos que, para $n > 2$,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x = \\
&= \left[-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x(-\cos x) dx = \\
&= (n-1)\int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-2} x(1-\operatorname{sen}^2 x) dx = \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

e portanto $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$; daí segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-2}} = 1$. Como, para todo n, $I_{n-2} \geq I_{n-1} \geq I_n$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = 1$.

Como $I_1 = 2$ e $I_2 = \frac{\pi}{2}$, temos que para todo $k \geq 0$,

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2,\ I_{2k+2} = \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \cdot \pi,$$

onde $n!! = \prod_{k>0}(n-2k)$. Assim, $\lim\limits_{k\to\infty} (2k+1) I_{2k+1}\, I_{2k+2} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2\pi(2k+1)}{2k+2} = 2\pi$, e $\lim\limits_{k\to\infty} (2k+2) I_{2k+2}\, I_{2k+3} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2\pi(2k+2)}{2k+3} = 2\pi$, ou seja, $\lim_{k\to\infty} n I_n\, I_{n+1} = 2\pi$, donde $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{P_n P_{n+1}}{n} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{n I_n I_{n+1}}{\pi^2} = \dfrac{2}{\pi}$.

Obs.: Alternativamente, pela aproximação de Stirling,

$$\begin{aligned}
\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} &= \frac{(2k)!}{(2k)!!^2} = \\
&= \frac{(2k)!}{[2^k k!]^2} \sim \\
&\sim \frac{(2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{4\pi k}\left(1+O(k^{-1})\right)}{4^k k^{2k} e^{-2k} 2\pi k\left(1+O(k^{-1})\right)} \sim \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} + O(k^{-\frac{3}{2}})
\end{aligned}$$

e portanto $I_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}} + O(n^{-\frac{3}{2}})$. Mas isso implica $P_n \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}} + O(1)$ e portanto $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n P_{n+1}}{n} = \frac{2}{\pi}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO

Problema 1

- Deduzir uma equação nas raízes que possua um número finito de soluções inteiras, como $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 26$.

  +5 PONTOS

- Completar corretamente a solução, encontrando os valores de n.

  +5 PONTOS

- Pequenos erros de conta.

  −1 PONTO

- (Não acumulável com os anteriores) Resposta correta sem justificativa.

  2 PONTOS

Problema 2

- Deduzir um sistema de equações que traduza corretamente a condição para que uma reta intersecte as 4 retas dadas.

  +3 PONTOS

- Completar corretamente a solução.

  +7 PONTOS

- Pequenos erros de conta.

  −1 PONTO

Resposta correta sem justificativa NÃO recebe pontos nesta questão. Uma tentativa de solução com erros de conta que não possam ser considerados "pequenos"não deve receber mais de 5 pontos no total.

Problema 3

As pontuações a seguir não são acumuláveis:

- Observar que os movimentos de subida e descida se compensam, assim como os movimentos para esquerda e direita.

  1 PONTO

- Expressar corretamente a resposta em forma de somatório.

  5 PONTOS

- Apresentar corretamente uma bijeção que simplifique a contagem (como transformar o problema em uma contagem de anagramas, por exemplo).

  3 PONTOS

- Obter, com demonstração, a resposta correta.

  10 PONTOS

Pequenos erros de conta perdem 1 ponto.

Problema 4

A dificuldade principal do problema consiste em utilizar a relação $A^7 = I$ para deduzir novas propriedades algébricas de B. O aluno que percebe isso e progride na direção de relacionar B com potências cada vez maiores de A deve ser recompensado.

As pontuações a seguir não são acumuláveis:

- Deduzir relações envolvendo B e potências de A maiores que 3, mas sem chegar a A^7.

  2 PONTOS

- Utilizar a relação $A^7 = I$ com sucesso para deduzir relações sobre B, sem contudo chegar a $B^k = I$.

  4 PONTOS

- Deduzir que $B^k = I$ para algum inteiro positivo k.

6 PONTOS

- Deduzir que $B^{127} = I$.

8 PONTOS

- Solução completa.

10 PONTOS

Problema 5

- Provar que 2 hipérboles não são suficientes.

+5 PONTOS

- Provar que existem 3 hipérboles que cobrem todos os pontos do plano.

+5 PONTOS

Ou seja, só há 3 pontuações possíveis para este problema: 0, 5 ou 10 pontos.

Problema 6

- Estimar P_n em termos da integral I_n.

+2 PONTOS

- Realizar uma transformação que facilite o cálculo da integral I_n.

+2 PONTOS

- Calcular corretamente I_n.

+2 PONTOS

- Aproximar corretamente I_n de maneira a eliminar os produtórios (fatoriais).

+2 PONTOS

- Calcular corretamente o limite.

+2 PONTOS