XXX Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos 5 **pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	91	1004	12	144	240	34

01.[91] A soma de todos os números do Sudoku completo é igual a 6 vezes a soma dos números em cada linha, ou seja, $6\times(1+2+\ldots+6)=6\times21=126$. A soma dos números que já estão escritos no Sudoku é 35. Logo a soma dos números que faltam para completar o Sudoku é 126 – 35 = 91.

02. [1004] Temos:

$$2009^2-1^2=4\cdot N\cdot(N+1)\Leftrightarrow(2009-1)(2009+1)=4N(N+1)\Leftrightarrow 2008\cdot2010=4N(N+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2008}{2}\cdot\frac{2010}{2}=\frac{4N(N+1)}{2\cdot2}\Leftrightarrow 1004\cdot1005=N(N+1)\Leftrightarrow N=1004$$

Soluções alternativas:

1ª solução

Cada linha pode ser associada a um número ímpar e a um múltiplo de 8 da seguinte forma: na linha 1 temos o quadrado de $1=2\cdot1-1$ (no lado esquerdo da igualdade) e 8 vezes 1 (no lado direito da igualdade), na linha 2 temos o quadrado de $3=2\cdot2-1$ e 8 vezes 2, na linha 3 temos o quadrado de $5=2\cdot3-1$ e 8 vezes 3 e assim sucessivamente, até chegarmos à linha N onde temos o quadrado de $2007=2N-1$ e 8 vezes N.
Assim, $2N-1=2007\Leftrightarrow 2N=2008\Leftrightarrow N=1004$.

2ª solução

Cada linha pode ser associada um múltiplo de 8 da seguinte forma: na linha 1 temos 8 vezes 1 (no lado direito da igualdade), na linha 2 temos 8 vezes 2, na linha 3 temos 8 vezes 3 e assim sucessivamente, até chegarmos a última linha, onde temos $2009^2-2007^2=8\cdot N$, que é a linha $\frac{2009-1}{2}=1004$, ou seja, N = 1004.

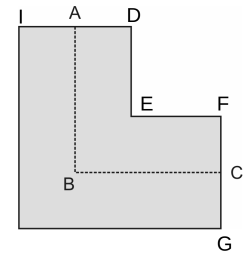
3ª solução

Temos:

$$2009^2-2007^2=8\cdot N\Leftrightarrow(2009-2007)(2009+2007)=8\cdot N\Leftrightarrow 2\cdot4016=8\cdot N\Leftrightarrow N=1004$$

03. [12] Seja x o lucro desse banco no primeiro semestre de 2007, em bilhões de reais. Logo $x+2{,}5\%\cdot x=4{,}1082\Leftrightarrow x+0{,}025x=4{,}1082\Leftrightarrow 1{,}025x=4{,}1082\Leftrightarrow x=4{,}008$ bilhões de reais, ou seja, o lucro foi de R$ 4008000000,00, cuja soma dos dígitos é 12.

04. [144] A partir das informações dadas, concluímos que na figura $ID = DE = EF = FG = 12$ metros e que A é o ponto médio de $\overline{ID}$, ou seja, AD = 6 metros e, da mesma forma, FC = 6 metros.
Logo AB = BC = 12 + 6 = 18 metros e, portanto, Esmeralda nadou $4 \cdot (18+18) = 4 \cdot 36 = 144$ metros.



05. [240] Supondo que Carlinhos tem Q reais, o preço do grama de queijo é $\frac{Q}{600}$ e o preço do grama de presunto é $\frac{Q}{400}$. Seja m a quantidade, em gramas, de queijo e de presunto que Carlinhos comprou. Dessa forma:

$$m \cdot \frac{Q}{600} + m \cdot \frac{Q}{400} = Q \Leftrightarrow m\left(\frac{1}{600} + \frac{1}{400}\right) = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{\frac{1}{600} + \frac{1}{400}} = \frac{400 \times 600}{400 + 600} = \frac{240000}{1000} = 240$$

Portanto ele comprou 240 gramas de cada item.

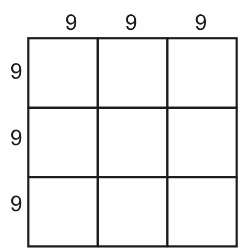
06. [34] São os múltiplos de 5, que nesse intervalo são 19; os múltiplos de 14, que são 6 (pois o 70 já foi contado); os múltiplos de 23, que são 4; os múltiplos de 32, que são 3 e, finalmente, os múltiplos de 41, que são 2. Note que o único múltiplo de 50 no intervalo, que é o próprio 50, já foi contato nos múltiplos de 5. Portanto ao todo são 19 + 6 + 4 + 3 + 2 = 34 números.

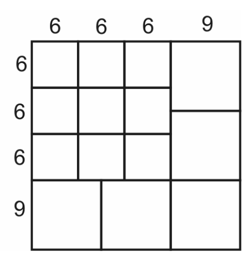
Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1

a) Os desenhos mostram as duas formas de construção dos quadrados. Elas são as únicas possíveis.
De fato, sendo *x* o número de quadrados de lado 6 cm e *y* o número de quadrados de lado 9 cm usados para construir um lado de 27 cm, temos:

$$6x + 9y = 27 \Leftrightarrow 2x + 3y = 9 \Leftrightarrow y = \frac{9-2x}{3}$$





Como *x* e *y* são inteiros não negativos, podemos substituir *x* apenas por 0, 1, 2, 3 ou 4. As únicas soluções para essa situação são $x = 0$ e $y = 3$ ou $x = 3$ e $y = 1$, representadas nos desenhos.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- cada desenho correto .... **[2,0 pontos]**

Observação: não é necessário que o aluno argumente, bastam os desenhos.

b) Repetindo mais 3 vezes a segunda construção acima, obtém-se um quadrado de lado 54 cm, com a utilização de 36 cartões de lado 6 cm e 20 cartões de lado 9 cm, sobrando apenas 1 cartão de lado 6 cm e 1 cartão de lado 9 cm. Esse quadrado é o maior que se pode construir, usando-se o maior número de cartões, 56 cartões.

De fato, como os quadrados construídos com os cartões devem ter lados com medidas inteiras, concluímos que o quadrado maior do que o construído deveria ter lado de 60 cm, pelo menos, já que o cartão menor tem lado 6 cm. Como $60^2 - 54^2 = 684\ \text{cm}^2$ é maior do que $6^2 + 9^2 = 117\ \text{cm}^2$, que é a soma das áreas dos quadrados que sobraram, concluímos que realmente o quadrado de lado 54 cm é o maior que se pode construir usando o maior número de cartões.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- apresentou, justificando, que a medida do lado 54 cm .... **[2,0 pontos]**
- apresentou as quantidades de cada cartão usado, no total de 56 cartões ... **[+4,0 pontos]**

A pontuação a seguir não se soma com as anteriores:

- acertou apenas uma das quantidades de cartões ....**[2,0 pontos]**

Observação: não é necessário provar que essa construção é a maior possível.

PROBLEMA 2

a) A maior coluna tem 2008 letras e OBM é um bloco de 3 letras. Como $2008 = 669 \cdot 3 + 1$, o número de vezes em que a palavra OBM aparece completamente na maior coluna é 669.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

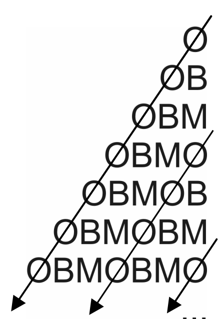
- apresentou, com algum tipo de explicação, o número 669 ....**[4,0 pontos]**

A pontuação a seguir não se soma com a anterior:

- montou a divisão corretamente mas errou o quociente ....**[3,0 pontos]**

b) Da esquerda para a direita, fazendo a contagem ao longo das flechas, a primeira passa por 2008 letras O. Como a segunda inicia 3 linhas abaixo, ela passa por $2008 - 3 = 2005$ letras O. Nesse padrão, a próxima passará por 2002 letras O, a seguinte, por 1999, e assim até a última flecha, que passará por 1.

Portanto o número de vezes que a letra O aparece no arranjo é $2008 + 2005 + 2002 + 1999 + \cdots + 1 = \dfrac{(2008+1)\cdot 670}{2} = 673015$.



CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- percebeu que ao longo da (1 + 3k)-ésima flecha há 2008 – 3k letras O ....**[2,0 pontos]**
- percebeu que o total de letras O é $2008 + 2005 + 2002 + 1999 + \cdots + 1$.......**[+2,0 pontos]**
- conclui que a soma $2008 + 2005 + 2002 + 1999 + \cdots + 1$ é 673015 ....**[+2,0 pontos]**

As pontuações a seguir não se somam com as anteriores:

- usou a fórmula da soma dos termos de uma PA corretamente sem explicitar que o total de letras é $2008 + 2005 + 2002 + 1999 + \cdots + 1$ .... **[2,0 pontos]**
- usou a soma dos termos da PA com a quantidade errada de termos ....**[1,0 ponto]**

Observação: não é necessário provar a soma dos termos de uma PA.

PROBLEMA 3

a) Há $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ peças com quantidades diferentes de pontos em cada lado e 8 com quantidades iguais, ou seja, o dominó de *Ferius* tem 28 + 8 = 36 peças diferentes.

Outra solução:
O dominó comum possui 28 peças. Como existem mais 8 novas peças que possuem alguma casa marcando 7 pontos, o dominó de *Ferius* tem 28 + 8 = 36 peças diferentes.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- apresentou, com algum tipo de explicação, o número 36 ....**[2,0 pontos]**

A pontuação a seguir não se soma com a anterior:

- encontrou apenas o número de peças com quantidades diferentes de pontos em cada lado ....**[1,0 ponto]**

b) Como a soma de um par e um ímpar é ímpar e há 4 quantidades ímpares de pontos (1, 3, 5, 7) e 4 quantidades pares de pontos (0, 2, 4, 6), há $4\cdot 4=16$ peças que não são importantes. Logo existem $36-16=20$ peças importantes.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- apresentou, com algum tipo de explicação, o número 20 ....**[3,0 pontos]**

A pontuação a seguir não se soma com a anterior:

- encontrou, com algum tipo de explicação, o número 16 ....**[2,0 pontos]**
- listou, caso a caso, mas não incluiu as peças com o zero ....**[2,0 pontos]**

Observação: soluções caso a caso também devem ser consideradas corretas.

c) Cada quantidade de pontos aparece exatamente 9 vezes. Assim a soma dos pontos de todas as peças é $9\cdot(1+2+3+\cdots+7)=252$. A soma dos pontos de todas as peças que não são importantes é $4\cdot(1+2+3+\cdots+7)=112$, pois cada quantidade de pontos aparece exatamente 4 vezes em peças que não são importantes. Assim, a soma pedida é $252-112=140$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- apresentou, com algum tipo de explicação, o número 140 .... **[5,0 pontos]**

As pontuações a seguir não se somam com a anterior:

- encontrou, com algum tipo de explicação, o número 252 .... **[2,0 pontos]**
- encontrou, com algum tipo de explicação, o número 112 ....**[2,0 pontos]**
- apresentou, sem justificativa, o número 140 ....**[2,0 pontos]**

Observação: soluções caso a caso também devem ser consideradas corretas. Além disso, cada erro em conta implica na perda de 1,0 ponto.