XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

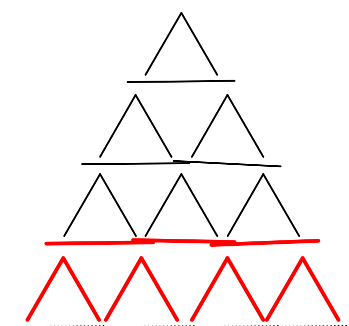
Na parte A serão atribuídos 5 **pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	40	55	65	10	392	252

1. [Resposta: 40] Para fazer um novo andar num castelo já construído, precisamos de três cartas para cada andar anterior mais duas para o topo. Assim, a partir do castelo de 3 andares, para fazer o de 4 andares, precisamos de mais $3\times 3+2=11$ cartas, num total de 15 + 11 = 26 cartas. Portanto, para fazer o castelo de 5 andares, precisamos de $26+4\times 3+2=40$ cartas.

Solução alternativa:

Para acrescentarmos um quarto andar a um castelo de 3 andares, precisamos de 3 cartas para separar a base dos demais andares e 4 pares de cartas para a base, totalizando 3 + 2.4 = 11 cartas a mais. Veja a figura a seguir:



Analogamente, para acrescentarmos um quinto andar a um castelo de 4 andares, precisamos de 4 cartas para separar a base dos demais andares e 5 pares de cartas para a base, totalizando 4 + 2.5 = 14 cartas a mais.Assim, para montar um castelo de 5 andares, precisamos de 15 + 11 + 14 = 40 cartas.

Observação: De fato, o acréscimo de um n-ésimo andar necessita de $n-1$ cartas para apoiar a base anterior, e n pares de cartas para a nova base. Portanto, são acrescentadas $n-1+2\cdot n=3n-1$ cartas por andar.

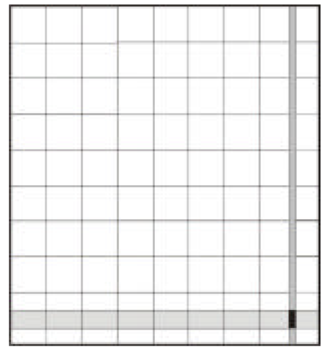
2. [Resposta: 55] Seja x a quantidade de meninas. Assim, a quantidade de meninos é $x+15$ e a quantidade total de alunos será $2x+15$. Fazendo a proporção, temos:

$$\frac{x}{2x+15}=\frac{4}{11}$$

Resolvendo a equação, obtemos $x=20$.

3. [Resposta: 65] Se cada aluno compareceu exatamente três dias, o número total de alunos do curso é $\frac{271+296+325+380+168}{3}=\frac{1440}{3}=480$. A menor frequência foi de 168 alunos, num total de 480 – 168 = 312 faltas. Portanto, o percentual de faltas nesse dia foi $\frac{312}{480}=0,65=65\%$.

4. [Resposta: 10] Na direção da medida 88 cm, Mariazinha irá usar 9 folhas e na direção da medida 95 cm, irá usar 10 folhas. Mariazinha começa colando as folhas sem sobreposição da esquerda para a direita e de cima para baixo (como na figura) e ao chegar às bordas direita e inferior, desloca, respectivamente, 2 cm à esquerda e 5 cm para cima (as regiões em cinza representam as sobreposições de 2 folhas). A região retangular preta é a intersecção dessas duas faixas de sobreposição, logo é coberta por 4 folhas. Sua área é de 10 cm^2.



5. [Resposta: 392] No número existem 502 algarismos 2 e 502 algarismos 9. Para retirar a menor quantidade possível de algarismos, devemos tentar deixar a maior quantidade possível de algarismos 2. Porém, a soma de todos os algarismos 2 é 1004. Ainda falta 1004 para completar a soma 2008. Como $1004=9\times111+5$ devemos deixar pelo menos 111 algarismos 9. Porém, é impossível deixar exatamente 111 algarismos 9. Se deixarmos 112 algarismos 9, devemos deixar 500 algarismos 2. Portanto, deve-se retirar no mínimo $2+390=392$ algarismos.

6. [Resposta: 252] Como todos os membros de uma família devem possuir pelo menos um algarismo comum, a maior quantidade de membros de uma família cujos elementos têm três algarismos é igual ao número de elementos de qualquer conjunto formado por todos os números de três algarismos que possuem um determinado algarismo em sua representação decimal.

O algarismo das centenas não pode ser zero. Vamos contar então todos os números que têm um determinado algarismo *a*, não nulo, pois há mais deles.
Há $9\times9=81$ números em que *a* aparece uma única vez, como algarismo das centenas.
Há $8\times9=72$ números em que *a* aparece uma única vez, como algarismo das dezenas (lembre-se que o das centenas não pode ser 0) e há 72 números em que o *a* aparece uma única vez, como algarismo das unidades.
Há 9 números com *a* na centena e na dezena, menos na unidade,
9 números com *a* na centena e na unidade, menos na dezena e
8 números com *a* na dezena e na unidade, menos na centena e um único número formado inteiramente de *a*. A quantidade total de números em que figura o algarismo não nulo *a* é 81 + 72 + 72 + 9 + 9 + 8 + 1 = 252.

Solução alternativa:

Para simplificar o raciocínio, vamos contar quantos números de três algarismos <u>não</u> contêm um algarismo *a*, não nulo, fixado. Assim, nessa situação, existem 8 escolhas para o algarismo das centenas (não pode ser 0 ou *a*), 9 escolhas para o algarismo das dezenas (não pode ser *a*), e 9 escolhas para os algarismos das unidades (não pode ser *a*). Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há 8.9.9 = 648 números que não possuem o algarismo *a*. Assim, como existem 900 números de 3 algarismos, há 900 – 648 = 252 números que possuem o algarismo *a* ($a\neq0$). Essa é a maior quantidade de membros que uma família pode ter.

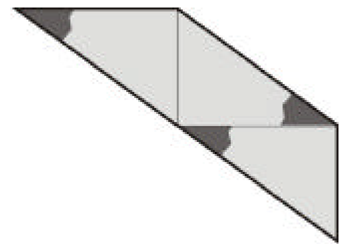
Observação:

Podemos verificar que a família formada por todos os números de três algarismos que possuem o zero tem $900-9\cdot 9\cdot 9=171$ membros.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1

a) O perímetro da primeira figura é $8+6+6+10+6=36$ e da segunda figura é $10+8+6+8+8=40$. Portanto a diferença é $40-36=4$.



b) A figura de maior perímetro é obtida quando fazemos coincidir os dois menores lados de cada um dos triângulos. Isso é mostrado na figura ao lado cujo perímetro é $10+10+10+8+6=44$ (há outras com o mesmo perímetro).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Calcular corretamente o perímetro da figura 1 **[2 pontos]**
Calcular corretamente o perímetro da figura 2 **[1 ponto]**
Achar a diferença igual a 4 **[+1ponto]**
Total de pontos item (a) **[4 pontos]**

b) Citar que o máximo ocorre quando fazemos coincidir os dois pares de menores lados **[3 pontos]**
Montar alguma figura correta **[+2 pontos]**
Concluir que o perímetro máximo é 44 **[+1ponto]**
Total de pontos item (b) **[6 pontos]**

PROBLEMA 2

Seja A o número de três dígitos e $B=10x+y$ o número de dois dígitos. Portanto, ao trocar a ordem dos dígitos de B, obtemos o número $10y+x$. Montando a equação segundo as condições do problema, temos:

$$A(10x+y)-A(10y+x)=9A(x-y)=2034$$

Com isso,

$$A(x-y)=226=2\cdot 113$$

Daí, se x, y são consecutivos, $A=226$, caso contrário $A=113$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Escrever o número de dois dígitos de uma das formas
$B=10x+y$, $B=10x+(x+1)$ ou $B=10(x+1)+x$ **[2 pontos]**
Achar a equação $A(10x+y)-A(10y+x)=9A(x-y)=2034$ ou algo similar **[+4 pontos]**
Achar o número 226, independente de justificativa **[2 pontos]**
Achar o número 113, independente de justificativa **[2 pontos]**

PROBLEMA 3

a) Sim, é possível. Por exemplo (há outros), podem existir quatro jogadores com pontuação 2 e outros quatro com pontuação 1. Fazendo A, B, C, D o primeiro grupo e E, F, G, H o segundo grupo, temos:

1ª Rodada
A vence E
B vence F
C vence G
D vence H

2ª Rodada
A empata com B
E empata com F
C empata com D
G empata com H

3ª Rodada
A empata com F
B empata com E
C empata com H
D empata com G

b) Após três rodadas, um jogador pode acumular no máximo 3 pontos. Como as pontuações são múltiplos inteiros de $\frac{1}{2}$, os possíveis valores de pontuação após a terceira rodada são: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$ (7 resultados possíveis)

Como existem 8 jogadores e apenas 7 possibilidades, dois jogadores terão pontuações iguais.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Afirmar que é possível e mostrar algum exemplo com no máximo um erro nas pontuações dos jogadores **[3 pontos]**. Caso existam dois ou três erros **[1 ponto]**.
Solução completa **[4 pontos]**.

b) Afirmar que a pontuação máxima de um jogador após três rodadas é 3 **[3 pontos]**. Descobrir que a quantidade de pontuações distintas é 7 **[+2 pontos]**.
Concluir que não é possível haver pontuações distintas para todos os jogadores **[+1 ponto]**.
Solução completa **[6 pontos]**.