XXX Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	6	1420	144	108	22

01. De

$$\frac{17}{18} = x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2(xy)^2 = 1 - 2(xy)^2,$$

obtemos $(xy)^2 = \frac{1}{36}$, e daí $\frac{1}{xy} = 6$.

02. O deslocamento líquido do viajante na direção Leste-Oeste foi de

$$(1-3) + (5-7) + \ldots + (2005-2007) = \underbrace{(-2) + (-2) + \ldots + (-2)}_{502\ \text{vezes}} = -1004.$$

Analogamente, o deslocamento líquido na direção Norte-Sul foi de –1004. Portanto, pelo teorema de Pitágoras a distância entre as posições inicial e final do viajante é $1004\sqrt{2}$. Observe agora que , como $\sqrt{2} \cong 1{,}414$, temos $1004\sqrt{2} \cong 1419{,}656$. Para ter certeza se estamos usando uma aproximação boa o suficiente, basta checar se $1419{,}5 < 1004\sqrt{2} < 1420$,
quer dizer, se $(1419{,}5)^2 < 1004^2 \cdot 2 < 1420^2$. Mas é fácil efetuar os cálculos e verificar que essas desigualdades realmente se verificam. Logo, a melhor aproximação pedida é 1420 metros.

03. Veja que $a + b = 1$ e

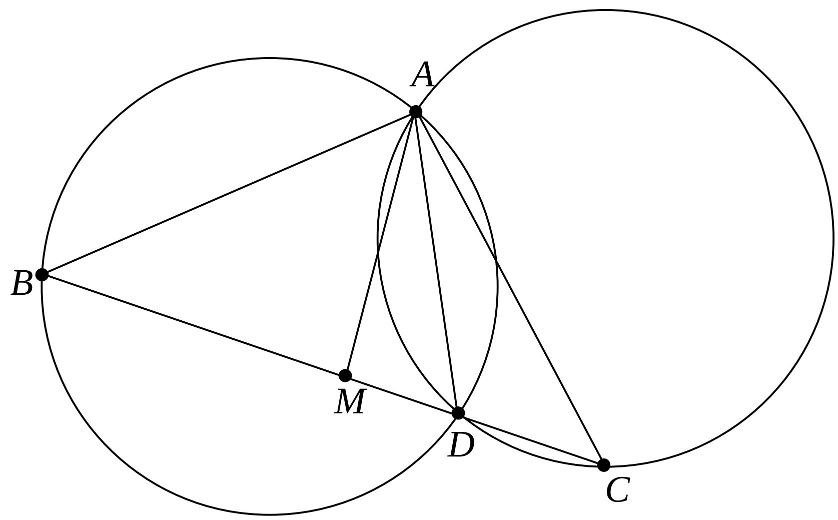
$$a^3 = a \cdot a^2 = a(a+1) = a^2 + a = 2a + 1,$$
$$a^4 = a \cdot a^3 = a(2a+1) = 2a^2 + a = 3a + 2,$$
$$a^5 = a \cdot a^4 = a(3a+2) = 3a^2 + 2a = 5a + 3.$$

Analogamente,

$$b^7 = b^4 \cdot b^3 = (5b+3)(b+1) = 5b^2 + 8b + 3 = 13b + 8.$$

Portanto, $13a^5 + 5b^7 = 13(5a+3) + 5(13b+8) = 65(a+b) + 79 = 65 + 79 = 144.$

04. Como os dois círculos circunscritos são iguais, segue do teorema do ângulo inscrito que $\angle ACB = \angle ABC$ e, com isso, *AB* = *AC*.



Seja *AM* a altura relativa ao lado *BC*. Como *ABC* é isósceles de base *BC*, segue que *AM* também é mediana, e daí *MC* = 9. Portanto, *MD* = 5 e, pelo teorema de Pitágoras, *AM* = 12. Finalmente, a área do triângulo *ABC* é $\frac{1}{2}(AM)(BC) = \frac{1}{2}(12)(18) = 108.$

05. Para que o primitivo de um número seja ímpar, todos os seus algarismos precisam ser ímpares, pois o produto de um número par por um número qualquer é sempre um número par. Assim, só nos restam os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 para construir o número pretendido. Por outro lado, como os algarismos precisam ser todos diferentes, o número terá, no máximo, 5 algarismos. Contudo, qualquer número com 5 algarismos ímpares e todos distintos tem primitivo 0. De fato, o produto dos números 1, 3, 5, 7 e 9 é 945 e seu primitivo é 0. O maior número com 4 algarismos ímpares e todos diferentes é 9753, mas esse número tem primitivo 0. O número que o antecede e tem seus 4 algarismos ímpares e distintos é 9751, e seu primitivo é 5. Portanto, a soma de seus algarismos é 9 + 7 + 5 + 1 = 22.

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Os catetos do triângulo medem *a* e *b*, e a hipotenusa mede *c*. Como a área e o perímetro são iguais, temos $\frac{1}{2}ab = a + b + c,$ e daí $c = \frac{1}{2}ab - a - b.$. Usando o teorema de Pitágoras, segue que $a^2 + b^2 = (\frac{1}{2}ab - a - b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - a^2b - b^2a + \frac{1}{4}a^2b^2,$

ou ainda $8ab - 4a^2b - 4b^2a + a^2b^2 = 0.$. Dividindo por *ab*, obtemos $(a-4)(b-4) = 8,$ de maneira que *a* - 4 divide 8. Portanto, os possíveis valores de *a* são 2, 3, 5, 6, 8 e 12. Determinando os valores de *b* e *c*, encontramos os triângulos de lados 5, 12, 13 ou 6, 8, 10.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Chegar à equação $8ab - 4a^2b - 4b^2a + a^2b^2 = 0$: **[4 pontos]**
- Conseguir a fatoração correta e concluir o problema: **[6 pontos]**
- Obter alguma ou as duas respostas corretas por meio de tentativas: **[1 ponto]**

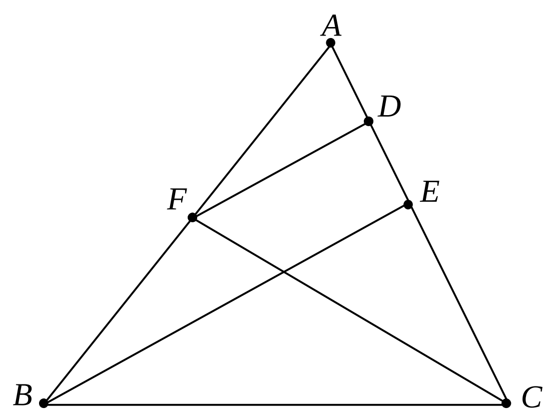
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Note que $(2009 - x)^2 - x^2 = 2009(2009 - 2x)$, um múltiplo de 2009. Assim, sempre que Pedro apagar um número, x^2 digamos, basta Igor apagar o número $(2009 - x)^2$. Desse modo, no final restarão dois números cuja diferença é um múltiplo de 2009.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Afirmou que os dois números finais têm um mesmo resto na divisão por 2009: **[1 ponto]**
- Considerou os resíduos módulo 2009: **[2 pontos]**
- Percebeu um padrão simétrico: **[2 pontos]**
- Concluiu o problema: **[5 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:



Seja D o pé da perpendicular baixada de F a AC. Pelo teorema de Pitágoras, segue que $EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$ Por outro lado, por semelhança de triângulos temos $FD = \frac{1}{2}BE = 2$ e $AE = 2DE$. Portanto,

$DC = \sqrt{CF^2 - FD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$

e daí $DE = 2\sqrt{3} - 3$, de maneira que $AE = 4\sqrt{3} - 6$. Finalmente,

$$[ABC] = \frac{1}{2}(AE + EC)BE = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3} - 6 + 3\right)\cdot 4 = 8\sqrt{3} - 6.$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Calcular a medida de EC: **[1 ponto]**
- Perceber que $FD = \frac{1}{2}BE$: **[2 pontos]**
- Calcular a medida de DC: **[2 pontos]**
- Calcular a medida de DE: **[1 pontos]**
- Concluir corretamente: **[4 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Há duas escolhas envolvidas e que determinam a maneira de viajar de B a C: por quais dentre as cidades $A_1,\ldots,A_6$ devemos passar, e em que ordem. Digamos que escolhamos passar por exatamente k dentre as cidades $A_1,\ldots,A_6$, com $1 \le k \le 6$; o número de modos de escolher as k cidades é $\binom{6}{k}$. Por outro lado, após escolhermos as k cidades, devemos escolher em que ordem vamos visitá-las, o que corresponde a $k!$ possibilidades. Logo, o número de modos de viajar de B a C é

$$\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}k! = \sum_{k=1}^{6}\frac{6!}{(6-k)!} = \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{4!} + \ldots + \frac{6!}{0!} = 1956.$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Contou corretamente o número de maneiras de viajar de B até C passando por exatamente uma e duas cidades: **[2 pontos]**
- Contou corretamente o número de maneiras de viajar de B até C passando por exatamente três cidades: **[1 ponto]**
- Contou corretamente o número de maneiras de viajar de B até C passando por exatamente quatro cidades: **[1 ponto]**
- Contou corretamente o número de maneiras de viajar de B até C passando por exatamente cinco cidades: **[1 ponto]**
- Contou corretamente o número de maneiras de viajar de B até C passando por exatamente seis cidades: **[1 ponto]**
- Fez a soma correta e concluiu o problema: **[4 pontos]**