XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	06	25	252	14	1704

1. [Resposta: 06]
Inicialmente temos 4,5 litros de água e 4,5 litros de álcool. Colocados x litros de água, para termos 30% de álcool na mistura, basta que $\frac{30}{100}(9+x)=4{,}5$, então $x=6$.

2. [Resposta: 25]
É fácil ver que $ab+bc+cd+da=b(a+c)+d(c+a)=(a+c)(b+d)$. Suponha sem perda de generalidade que $a=1$. Com isso, $\{a,c\}=\{1,2\},\{1,3\}$ ou $\{1,4\}$ e conseqüentemente {b,d}={3,4}, {2,4} ou {2,3}, respectivamente. Assim os possíveis valores do produto são 21, 24 e 25 e o máximo é 25.

3. [Resposta: 252]
O algarismo das centenas não pode ser zero. Vamos contar então todos os números que têm um determinado algarismo *x*, não nulo, pois há mais deles.
Há $9\times 9=81$ números em que *x* aparece uma única vez, como algarismo das centenas.
Há $8\times 9=72$ números em que *x* aparece uma única vez, como algarismo das dezenas (lembre-se que o das centenas não pode ser 0) e há 72 números em que o *x* aparece uma única vez, como algarismo das unidades.
Há 9 números com *x* na centena e na dezena, menos na unidade,
9 números com *x* na centena e na unidade, menos na dezena e
8 números com *x* na dezena e na unidade, menos na centena e um único número formado inteiramente de *x*. A quantidade total de números em que figura o algarismo não nulo *x* é 81 + 72 + 72 + 9 + 9 + 8 + 1 = 252

4. [Resposta: 14]
Seja $n=10A+B$ o número de dois dígitos. Se A divide n, então A divide B. Se $A>5$, então $B=A$, pois B não pode ser 0 e $B<10<2A$.

Listemos as possibilidades:

Se $A=1$ então AB pode ser 11, 12, 15.
Se $A=2$, então AB pode ser 22, 24.
Se $A=3$, então AB pode ser 33, 36.
Se $A=4$, então AB pode ser 44, 48.
Se $A=5$, então AB pode ser 55.
Se $A=6$, então AB pode ser 66.
Se $A=7$, então AB pode ser 77.

Se $A=8$, então AB pode ser 88.
Se $A=9$, então AB pode ser 99.

Logo, o total de números é 3 + 2 + 2 + 2 + 5 = 14.

5. [Resposta: 1704]

Sejam K a interseção dos lados AD e FG, e L a interseção dos lados AB e EH. Por simetria, veja que $KD=KF$ e $AK=KG$. Considere $FK=x$. Dessa forma, $AK=48-x$. Usando teorema de Pitágoras no triângulo AFK, temos:

$$24^2+x^2=(48-x)^2.$$

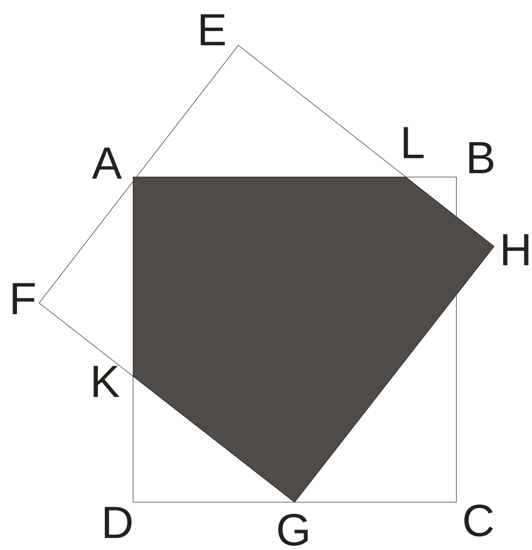
Que nos dá $x=18$.

Agora, veja que os triângulos AFK e ALE são semelhantes. Portanto,

$$\frac{AE}{FK}=\frac{EL}{AF}.$$

Assim, $EL=32$.

Para achar a área procurada, basta subtrair a área do quadrado $EFGH$ das áreas dos triângulos AFK e AEL. Portanto a área será 1704.



Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	15	9	3	18	12	6
1	7	1	16	10	4	19	13
2	14	8	2	17	11	5	20

A resposta é 15 + 8 + 10 + 11 + 12 + 13 = 69.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Completou a tabela corretamente a tabela. **[10 pontos]**;

Caso exista um ou dois erros na tabela **[7 pontos]**;

Separou em grupos os números de 0 a 20 que deixam resto 0 ao serem divididos por 3, que deixam resto 1 ao serem divididos por 3, que deixam resto 2 ao serem divididos por 3, que deixam resto 0 ao serem divididos por 7, que deixam resto 1 ao serem divididos por 7, que deixam resto 2 ao serem divididos por 7, que deixam resto 3 ao serem divididos por 7, que deixam resto 4 ao serem divididos por 7, que deixam resto 5 ao serem divididos por 7 e que deixam resto 6 ao serem divididos por 7 mas não completou a tabela corretamente. **[5 pontos]**

PROBLEMA 2:

$$S_4 = (r+s)S_3 - rsS_2 = (r+s).5 - rs.2 = 5r + 5s - 2rs = 6$$

$$S_3 = (r+s)S_2 - rsS_1 = (r+s).2 - rs.1 = 2r + 2s - rs = 5$$

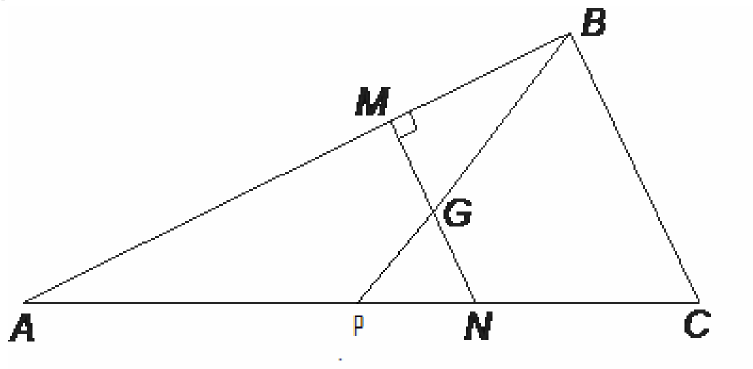
Com isso, encontramos que $r+s=-4$ e $rs=-13$. Daí, $S_5 = (r+s)S_4 - rsS_3 = -24+65 = 41$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Montar e resolver o sistema de equações $5r+5s-2rs=6$ e $2r+2s-rs=5$. **[6 pontos]**
Concluir o problema **[4 pontos]**

Outra maneira:
Descobrir de alguma maneira correta $r+s$ e rs **[6 pontos]**
Concluir o problema **[4 pontos]**

PROBLEMA 3:



Se BP é uma mediana do triângulo então AP = CP = 6 e PN = 2. Como G é o baricentro do triângulo então $\frac{PG}{GB} = \frac{1}{2}$ e $\frac{PN}{NC} = \frac{1}{2}$, assim, pela recíproca do teorema de Tales, GN é paralelo a BC e $\angle B = 90^o$. Como o triângulo ABC é retângulo então AP = CP = BP = 6. Com isso, BG = 4 e GP = 2.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Prolongar BG até encontrar AC em P e dizer que $\frac{BG}{GP} = 2$ **[2 pontos]**;
Determinar as medidas de AP, PN e CN **[2 pontos]**;
Perceber que GN e BC são paralelos e concluir que $\angle B = 90^o$ **[2 pontos];**
Perceber que AP = BP = CP **[2 pontos]**;
Concluir **[2 pontos]**

Qualquer outra solução correta **[10 pontos]**

PROBLEMA 4:
a) Após três rodadas, um jogador pode acumular no máximo 3 pontos. Como as pontuações são múltiplos inteiros de ½ , os possíveis valores de pontuação após a terceira rodada são:

0,1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3

Como existem 8 jogadores e apenas 7 possibilidades, dois jogadores terão pontuações iguais.

b) Se k é a pontuação do primeiro colocado e todas as pontuações são distintas, a soma das pontuações dos oito jogadores será no máximo:

$$k + \left(k - \frac{1}{2}\right) + (k-1) + \left(k - \frac{3}{2}\right) + (k-2) + \left(k - \frac{5}{2}\right) + (k-3) + \left(k - \frac{7}{2}\right) = 8k - 14$$

Como foram disputados exatamente $4x7 = 28$ pontos, temos

$8k-14 \geq 28$

Logo, $k \geq 5+\frac{1}{2}$ pois as pontuações são múltiplos inteiros de $\frac{1}{2}$. Basta mostrarmos um exemplo onde este valor é atingido.

Na tabela abaixo, marcamos na interseção da linha A_i com a coluna A_j o número de pontos que A_i ganhou na partida disputada contra A_j.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	Total
A_1	X	1	1	1	1	1	½	0	5+½
A_2	0	x	1	1	1	1	1	0	5
A_3	0	0	x	1	1	1	1	½	4+½
A_4	0	0	0	X	1	1	1	1	4
A_5	0	0	0	0	X	0	0	0	0
A_6	0	0	0	0	1	X	½	1	2+½
A_7	½	0	0	0	1	½	x	1	3
A_8	1	1	½	0	1	0	0	x	3+½

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Item (a)

- Comentar que a pontuação máxima de um jogador após três rodadas é 3: **[1 ponto]**;
- Afirmar que existem no máximo 7 possíveis pontuações **[2 pontos]**;
- Concluir usando o Princípio da Casa dos Pombos **[1 ponto]**

Item (b)

- Achar a equação $k+\left(k-\frac{1}{2}\right)+(k-1)+\left(k-\frac{3}{2}\right)+(k-2)+\left(k-\frac{5}{2}\right)+(k-3)+\left(k-\frac{7}{2}\right)=8k-14$ ou algo similar **[3 pontos]**;
- Achar que a pontuação máxima é $k \geq 5+\frac{1}{2}$ **[1 ponto];**
- Construir o exemplo **[2 pontos]**;

OBS: Caso o aluno apenas construa uma tabela correta deverá receber todos os **[6 pontos]** deste item.

OBS2: Caso o aluno escreva algum exemplo para $k = 6$ deverá receber **[1 ponto]** dos 6 pontos deste item.