XXX Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

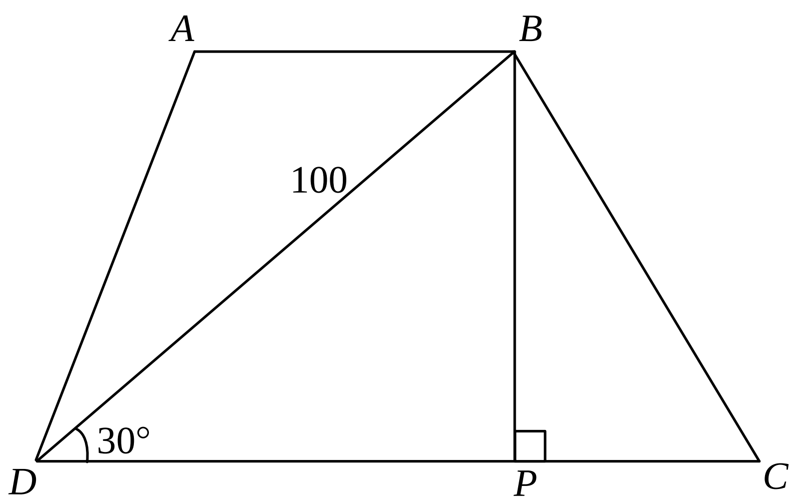
Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	7500	9779	9376	256	18

01. Seja P a projeção ortogonal de B sobre $\overline{CD}$.



Temos que $CP = \dfrac{CD - AB}{2}$ logo $PD = CP + AB = \dfrac{AB + CD}{2}$. Assim, a área do trapézio é

$S = BP \cdot \dfrac{AB + CD}{2} = BP \cdot PD = (100 \text{ sen}30°) \cdot (100 \cos 30°) = 2500\sqrt{3} \text{ m}^2$ e portanto $S\sqrt{3} = 7500.$

02. Observe que para $i \geq 1$ temos

$\left\lfloor \sqrt[4]{n} \right\rfloor = i \Leftrightarrow i \leq \sqrt[4]{n} < i + 1 \Leftrightarrow i^4 \leq n < (i+1)^4$ e assim há $(i+1)^4 - i^4$ números n tais que $\left\lfloor \sqrt[4]{n} \right\rfloor = i.$

Portanto a soma pedida é

$1 \cdot (2^4 - 1^4) + 2 \cdot (3^4 - 2^4) + 3 \cdot (4^4 - 3^4) + 4 \cdot (5^4 - 4^4) + 5 \cdot (6^4 - 5^4) + 6 \cdot (2008 - 6^4 + 1) = 9779.$

03. Seja n um inteiro de 4 dígitos. Temos que n é auto-replicante se e somente se $n^2 - n$ é divisível por 10000, isto é, $2^4 \mid n(n-1)$ e $5^4 \mid n(n-1)$. Como n e n – 1 são primos entre si, temos 4 possibilidades:

- $2^4 \mid n$ e $5^4 \mid n$
- $2^4 \mid (n-1)$ e $5^4 \mid (n-1)$
- $2^4 \mid n$ e $5^4 \mid (n-1)$
- $2^4 \mid (n-1)$ e $5^4 \mid n.$

A primeira possibilidade implica que $10^4 \mid n,$ o que é impossível pois $1000 \le n \le 9999.$ Da mesma forma, a segunda não ocorre.
Na terceira possibilidade, de $5^4 \mid (n-1)$ temos que $n = 625k+1$ para algum k inteiro e que $625k+1 \equiv 0 (\text{mod} 16) \Leftrightarrow k+1 \equiv 0 (\text{mod} 16) \Leftrightarrow k \equiv 15 (\text{mod} 16)$
Assim, $k = 15+16\ell$ para algum ℓ inteiro e $n = 625(15+16\ell)+1 = 9376+10000\ell$
E como $1000 \le n \le 9999$, a única possibilidade é $n = 9376.$
Finalmente, para a quarta possibilidade, temos que n = $625k$, k inteiro, e que $n-1 \equiv 0 (\text{mod} 16) \Leftrightarrow k \equiv 1 (\text{mod} 16)$.
Assim, $k = 1+16\ell$, ℓ inteiro, e $n = 625(1+16\ell) = 625+10000\ell$. Como $1000 \le n \le 9999,$ não há soluções neste caso.
Logo o único número auto-replicante de 4 dígitos é 9376.

04. Da propriedade, decorre que 9 só pode aparecer ou como primeiro ou como último elemento da permutação e que os elementos de 1 a 8 formam uma permutação com a mesma propriedade. Assim, o número pedido é o dobro do número de permutações de 1, 2,...,8 com a mesma propriedade. Da mesma forma, o número de permutações de 1, 2,.., 8 com a propriedade é o dobro do número de permutações de 1, 2,.., 7 com a propriedade. Repetindo o raciocínio, concluímos que o número pedido é portanto $2^8 = 256.$

05. Seja $a = \sqrt[3]{-27+5\sqrt{33}} - \sqrt[3]{27+5\sqrt{33}}.$ Temos

$$a^3 = -27+5\sqrt{33} - \left(27+5\sqrt{33}\right) - 3\sqrt[3]{-27+5\sqrt{33}} \cdot \sqrt[3]{27+5\sqrt{33}} \cdot \left(\sqrt[3]{-27+5\sqrt{33}} - \sqrt[3]{27+5\sqrt{33}}\right)$$

$$\Rightarrow a^3 = -54 - 3\sqrt[3]{96} \cdot a \Rightarrow \left(a^3+54\right)^3 = -2^5 \cdot 3^4 a^3$$

Agora faça $18y = a^3$. Temos

$$\left(18y+54\right)^3 = -2^6 \cdot 3^6 y \Leftrightarrow \left(y+3\right)^3 = -2^3 y \Leftrightarrow y^3 + 9y^2 + 35y + 27 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y^2+8y+27) = 0$$

Como a, e portanto y, são reais e $y^2+8y+27=0$ não tem raízes reais, concluímos que $y = -1$ e portanto $a = -\sqrt[3]{18}$ (pasmem!). Assim, a é raiz do polinômio $x^3+18=0,$ que é o polinômio minimal de a já que $x^3+18=0$ não possui raízes racionais.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Olhando a equação módulo 7, temos: $m^2 \equiv 3^n$, porém m^2 só poderá ser congruente a 0,1,2,4 enquanto que se n for ímpar 3^n só poderá ser congruente a 3, 5, 6, então n deverá ser par. Logo existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2n_0$. Voltando à equação original temos:

$m^2+161=3^{2n_0} \Leftrightarrow 3^{2n_0}-m^2=161 \Leftrightarrow \left(3^{n_0}-m\right)\left(3^{n_0}+m\right)=161.$ Como m e n são inteiro positivos, logo o módulo de $\left(3^{n_0}-m\right)$ é menor que $\left(3^{n_0}+m\right),$ e como $\left(3^{n_0}-m\right)$ é positivo e $161=7\cdot 23$, então temos as opções:

- $3^{n_0}-m=1$ e $3^{n_0}+m=161 \Leftrightarrow 3^{n_0}=81$ e $m=80 \Leftrightarrow n_0=4$ e $m=80 \Leftrightarrow n=8$ e $m=80$
- $3^{n_0}-m=7$ e $3^{n_0}+m=23 \Leftrightarrow 3^{n_0}=15$ e $m=8.$ Não há solução inteira.

Logo m = 80 e n= 8 é a única solução.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Analisou a equação módulo 7: **[2 pontos]**
- Conclui que n é par: **[3 pontos]**
- Fatorou a equação: **[2 pontos]**
- Dividiu em casos e achou a única solução possível: **[3 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Para que $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$ então a imagem de f deverá só conter pontos fixos. Utilizando esse fato temos:

- Com 5 pontos fixos na imagem teremos 1 função possível.
- Com 4 pontos fixos na imagem teremos $\binom{5}{1}4=20$ funções
- Com 3 pontos fixos na imagem teremos $\binom{5}{2}\cdot 3^2=90$ funções
- Com 2 pontos fixos na imagem teremos $\binom{5}{3}\cdot 2^3=80$ funções
- Com 1 ponto fixo na imagem teremos $\binom{5}{4}\cdot 1^4=5$ funções

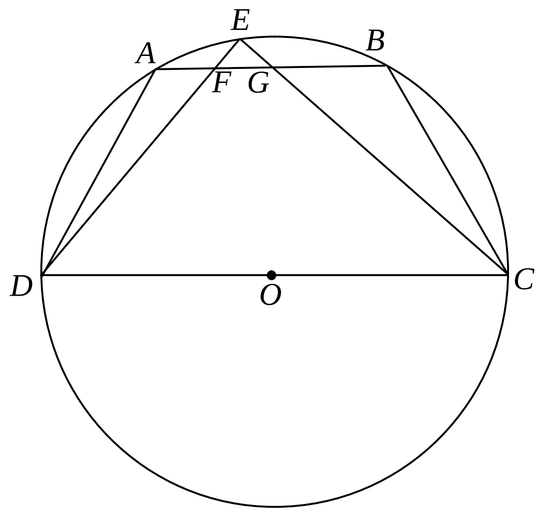
logo o total de funções f satisfazendo $f(f(x))=f(x)$ igual a 196.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Reduziu o problema a contar o número de pontos fixos da imagem de $f(x)$: **[3 pontos]**
- Conclui que o total de funções com:

5 pontos fixos é igual a 1: **[1 ponto]**
4 pontos fixos é igual a 20: **[1 ponto]**
3 pontos fixos é igual a 90: **[1 ponto]**
2 pontos fixos é igual a 80: **[1 ponto]**
1 ponto fixo é igual a 5: **[1 ponto]**

- Concluiu que o total de funções possíveis é igual a 196: **[2 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:



Como $A\hat{B}E \cong A\hat{D}E$ (ambos enxergam o arco $\overset{\frown}{AE}$) temos que $\Delta FBE \sim \Delta FDA$ e portanto

$$\frac{FB}{FD} = \frac{BE}{DA} \quad (1)$$

Analogamente, das semelhanças $\Delta EBG \sim \Delta ACG$, $\Delta AEG \sim \Delta CBG$ e $\Delta AEF \sim \Delta DBF$ obtemos respectivamente

$$\frac{BG}{CG} = \frac{EB}{AC} \quad (2)$$

$$\frac{AE}{CB} = \frac{AG}{CG} \quad (3)$$

$$\frac{AE}{DB} = \frac{AF}{DF} \quad (4)$$

Assim, utilizando o fato que $ABCD$ é isósceles (de modo que $AD = BC$ e $BD = AC$) temos

$$\frac{AF \cdot BG}{FG} \overset{(2)\text{ e }(4)}{=} \frac{1}{FG} \cdot \frac{AE \cdot DF}{DB} \cdot \frac{CG \cdot EB}{AC}$$

$$= \frac{1}{AC^2} \frac{(AE \cdot CG)(DF \cdot EB)}{FG} \overset{(1)\text{ e }(3)}{=} \frac{AD^2}{AC^2} \cdot \frac{AG \cdot BF}{FG}$$

$$= \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \frac{(AF + FG)(BG + FG)}{FG}$$

$$= \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \frac{FG(AF + FG + BG) + AF \cdot BG}{FG}$$

$$= \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \cdot \left(AB + \frac{AF \cdot BG}{FG}\right)$$

Em suma, temos

$$\frac{AF \cdot BG}{FG} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \cdot \left(AB + \frac{AF \cdot BG}{FG}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AF \cdot BG}{FG} = \frac{AD^2 \cdot AB}{AC^2 - AD^2}$$

Utilizando o fato de que $ABCD$ é isósceles com base CD = 50 e altura 24, aplicando Pitágoras várias vezes é fácil calcular AB = 14, AD = 30, AC = 40.

Assim, $\frac{AF \cdot BG}{FG} = 18$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Percebeu as semelhanças $\Delta FBE \sim \Delta FDA$, etc. **[1 ponto]**
- Obteve as equações (1), (2), (3), (4): **[até 4 pontos: 1 ponto por cada equação]**
- Desenvolveu a expressão de $\frac{AF \cdot BG}{FG}$, obtendo uma equação para tal **[4 pontos]**
- Concluiu **[1 ponto]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Vamos mostrar que o menor produto é obtido quando tomamos os elementos da diagonal principal.
Neste caso, o produto é dado por $(1+1)(2+2)(3+3)...(2008+2008) = 2^{2008} \cdot 2008!$

Suponha que todos os elementos (1, 1), (2, 2),..., (i – 1, i – 1) tenham sido escolhidos mas que os elementos nas i– ésimas linha e colunas sejam (i, j) e (k, i) com j e k maiores ou iguais a i + 1. Vamos mostrar que trocando estes dois elementos por (i, i) e (k, j) obtemos um produto menor. De fato, para isto devemos mostrar que

$$\begin{aligned}
&(i+i)(j+k) < (i+j)(i+k) \\
&\Leftrightarrow 2i(j+k) < i^2 + (j+k)i + jk \\
&\Leftrightarrow i^2 - (j+k)i + jk > 0 \\
&\Leftrightarrow (i-j)(i-k) > 0
\end{aligned}$$

O que é verdade, já que $i - j < 0$ e $i - k < 0$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Determinou que o menor produto ocorre tomando-se os elementos da diagonal principal **[2 pontos]**
- Provou que esta escolha é a que dá o menor produto **[6 pontos]**
- Concluiu e achou o mínimo **[2 pontos]**