XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	0069	0006	1339	0033	9993

01. [Resposta: 0069]

Solução:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	15	9	3	18	12	6
1	7	1	16	10	4	19	13
2	14	8	2	17	11	5	20

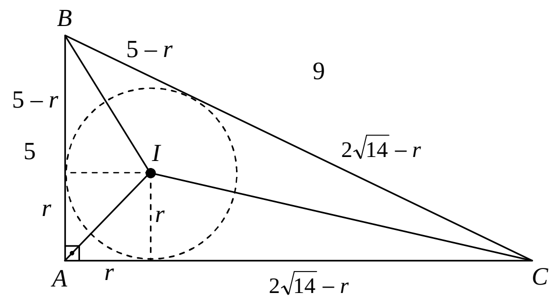
A resposta é 15 + 8 + 10 + 11 + 12 + 13 = 69.

02. [Resposta: 0006]

Solução: Pelo teorema de Pitágoras, é imediato que

$$AC^2 = 9^2 - 5^2 = 56 \therefore AC = 2\sqrt{14}\,.$$

Seja r o raio do círculo inscrito, como mostrado na figura abaixo.



Como os comprimentos das tangentes ao círculo inscrito partindo de cada vértice são iguais, ficamos com a equação

$$(5 - r) + (2\sqrt{14} - r) = 9,$$

de onde obtemos $r = \sqrt{14} - 2$. Novamente pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$CI^2 = r^2 + (2\sqrt{14} - r)^2 = (\sqrt{14} - 2)^2 + (\sqrt{14} + 2)^2 = 36 \therefore CI = 6\,.$$

03. [Resposta: 1339]

Solução: Fazendo $x = t\cdot y$, a equação inicial reduz-se a

$$t^2 + 3 \geq c\cdot(t^2 + t + 4).$$

Logo, devemos ter $(c - 1)t^2 + ct + (4c - 3) \leq 0$, para todo t real. Para isto, devemos ter $c - 1 < 0$ e o discriminante $\Delta = c^2 - 4\cdot(c - 1)\cdot(4c - 3) \leq 0$.

Da última inequação, obtemos $-15c^2 + 28c - 12 \leq 0$, cuja solução é $c \leq \frac{2}{3}$ ou $c \geq \frac{6}{5}$. Como $c < 1$, o maior valor possível de c é 2/3. Daí, $2009\cdot c = 1339,333...$.

04. [Resposta: 0033]

Solução: Seja $P(a, b)$ a probabilidade de o voluntário ganhar o carro no caso em que ele tenha colocado a bolas VERDES e b bolas VERMELHAS na caixa 1. Então, necessariamente haverá $(10 - a)$ bolas VERDES e $(10 - b)$ bolas VERMELHAS na caixa 2. Segue que

$$P(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10-a}{20-a-b}.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a + b \leq 10$, já que as caixas são idênticas. Suponha, ainda, que haja alguma bola VERMELHA na caixa 1. Vejamos o que acontece com essa probabilidade se transferirmos uma bola VERDE da caixa 2 para a caixa 1 e uma bola VERMELHA da caixa 1 para a caixa 2. Ficamos com

$$P(a+1,b-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9-a}{20-a-b}.$$

Dessa forma,

$$P(a+1,b-1) - P(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{20-a-b}\right) \geq 0,$$

pois $a + b \leq 10$.

Assim, o voluntário sabe que, enquanto houver bola VERMELHA na caixa que contém menos bolas, a probabilidade pode ser aumentada, bastando, para isto, que ele troque uma das bolas VERMELHAS desta caixa com uma VERDE da outra. Por isso, para maximizarmos a probabilidade, basta considerarmos o caso em que a caixa 1 contém apenas bolas VERDES e a caixa 2 contém o restante das bolas. Teremos

$$\begin{aligned} P(a,0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10-a}{20-a} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{10-a}{20-a}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{10}{20-a}\right) = 1 - \frac{5}{20-a}. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade será máxima quando a for mínimo. Como em cada caixa deve haver pelo menos uma bola, devemos ter $a = 1$. Neste caso, a probabilidade é:

$$P(1,0) = 1 - \frac{5}{19} = \frac{14}{19}.$$

Segue que $m = 14$, $n = 19$ e $m + n = 33$.

05. [Resposta: 9993]

Solução: Vamos analisar os restos das divisões de 2^n e n por 5.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
$\boldsymbol{2^n}$	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1
$\boldsymbol{2^n + n}$	3	1	1	0	2	0	0	4	1	4	4	3	0	3	3	2	4	2	2	1

Veja que os restos das divisões de 2^n por 5 formam uma seqüência de período 4, enquanto que os restos das divisões de n por 5 formam uma seqüência de período 5. Logo, os restos das divisões de $2^n + n$ formam uma seqüência de período 20, dada pela última linha da tabela acima. Dessa forma, tomando os números de 1 a 10000 em intervalos de tamanho 20, o maior n tal que $2^n + n$ deixa resto zero na divisão por 5 é o 13º termo do ultimo intervalo, ou seja, o número $9980 + 13 = 9993$.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

Seja $k = a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. Temos $3k = a_1 + a_2 + ... + a_6$ é múltiplo de 9, uma vez que n é múltiplo de 9. Daí, segue que k é múltiplo de 3.

Mas, como os algarismos são distintos, perceba que

$$1 + 2 + ... + 6 \le a_1 + a_2 + ... + a_6 \le 4 + 5 + ... + 9 \Leftrightarrow 21 \le 3k \le 39 \Leftrightarrow 7 \le k \le 13.$$

Como k é múltiplo de 3, temos dois casos: $k = 9$ e $k = 12$.

1º caso: $k = 9$. Veja que é suficiente escolhermos a_1, a_2 e a_3, pois $a_4 = 9 - a_3$, $a_5 = 9 - a_2$ e $a_6 = 9 - a_1$. Como os dígitos devem ser distintos, devemos escolher a_1, a_2 e a_3 de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos {1, 8}, {2, 7}, {3, 6} e {4, 5}. Esta escolha pode ser feita da seguinte forma:

- Escolhemos três dos quatro conjuntos: 4 maneiras;
- Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
- Permutamos os dígitos escolhidos: $3! = 6$ maneiras.

Logo, o total de números, neste caso, é igual a $4 \times 8 \times 6 = 192$.

2º caso: $k = 12$. Neste caso, os dígitos a_1, a_2 e a_3 devem ser escolhidos do conjunto {3, 4, 5, 7, 8, 9} de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos {3, 9}, {4, 8} e {5, 7}. Esta escolha pode ser feita da seguinte maneira:

- Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
- Permutamos os dígitos escolhidos: $3! = 6$ maneiras.

Logo, o total de números, neste caso, é igual a $8 \times 6 = 48$.

O total de números é, portanto, $192 + 48 = 240$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Mostrou que k é múltiplo de 3: **[2 pontos]**
- Concluiu que há duas possibilidades $k = 9$ e $k = 12$: **[+ 2 pontos]**
- Determinou corretamente a quantidade de números em um caso: **[+ 3 pontos por cada caso.]**

PROBLEMA 2:

Analisando a equação módulo 5, obtemos $4\cdot 3^a \equiv 1 (mod\,5) \Leftrightarrow 3^a \equiv 4(mod\,5)$.

Mas os valores de $3^a\ mod\,5$ são periódicos de período 4:

a	0	1	2	3	4	5	6	7
3ª mod 5	1	3	4	2	1	3	4	2

Assim, concluímos que $3^a \equiv 4(mod\,5) \Leftrightarrow a = 2+4t$ para $t \in \mathbb{N}$.

Agora, analisando a equação módulo 3, obtemos $11+5^b \equiv 0(mod\,3) \Leftrightarrow (-1)^b \equiv 1(mod\,3)$ o que ocorre se, e só se, *b* é par.

Portanto *a* e *b* são ambos pares, digamos *a*= 2*c* e *b* = 2*d* para dois inteiros positivos *c*, *d*. Assim,

$$4\cdot 3^a = 11+5^b \Leftrightarrow \left(2\cdot 3^c\right)^2 - 5^{2d} = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cdot 3^c - 5^d\right)\left(2\cdot 3^c + 5^d\right) = 11$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\cdot 3^c - 5^d = 1 \\ 2\cdot 3^c + 5^d = 11 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3^c = 3 \\ 5^d = 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a = 2\cdot c = 2 \\ b = 2\cdot d = 2 \end{vmatrix}$$

Assim, a única solução é: $(a,b) = (2,2)$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

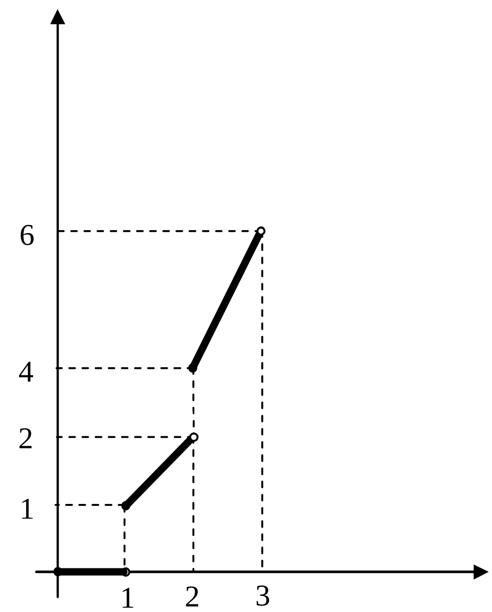
- Mostrou que *a* é par: **[4 pontos]**
- Mostrou que *b* é par: **[3 pontos]**
- Concluiu, encontrando a única solução: **[3 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores:

- verificou que *a* = 2 e *b* = 2 é uma solução, mas não mostrou que é a única solução: **[2 pontos]**

PROBLEMA 3:

Vamos fazer o gráfico da função $f(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor$. Para cada k natural, se $k \le x < k + 1$, temos $\lfloor x \rfloor = k$. Logo, o gráfico de f é formado por segmentos de reta $y = k \cdot x$, como mostra a figura a seguir:



Assim, para um n fixo, a equação $f(x) = n$ tem no máximo uma solução. Portanto, a quantidade de elementos de

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{2009}$$

é igual à quantidade de inteiros n, tais que $1 \le n \le 2009$, para os quais $f(x) = n$ admite solução, isto é, os n tais que

$$f(k) = k^2 \le n < k(k + 1) = k^2 + k,$$

para algum $k \in N$.

Como $k^2 \le 2009 \Leftrightarrow k \le 44$, esta quantidade é: $1 + 2 + 3 + \ldots + 44 = 44 \cdot 45/2 = 990$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

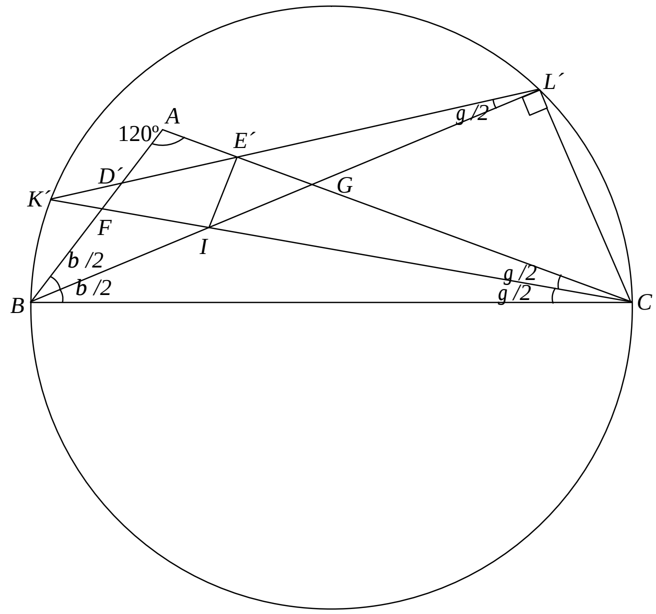
- Mostrou que $f(x) = n$ tem solução se, e só se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k^2 \le n < k^2 + k$: **[8 pontos]**
- Concluiu: **[2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores:

- Desenhou o gráfico de $f(x) = x\lfloor x \rfloor$ mas não concluiu que $f(x) = n$ tem solução se, e só se, $k^2 \le n < k^2 + k$ para algum $k \in \mathbb{N}$: **[4 pontos]**

PROBLEMA 4

Vamos mostrar inicialmente que BL e CK são as bissetrizes dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ do ΔABC. Para isto, sejam K' e L' as intersecções das bissetrizes de $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ com a circunferência de diâmetro $\overline{BC}$, como na figura. Seja ainda I o incentro de ΔABC e β e γ as medidas de $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, de modo que $\beta+\gamma=60°$.



Sejam D' e E' as intersecções de $\overline{K'L'}$ com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo. Para mostrar que $\overline{K'L'}=\overline{KL}$, basta mostrar que E' e D' são as projeções ortogonais de I aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Como $\overline{BC}$ é diâmetro, temos que $\measuredangle BL'C$ é reto, assim se mostrarmos que o quadrilátero $IE'L'C$ é cíclico, provaremos que $IE'C$ é reto, e analogamente para D'.

Denote por F e G os encontros das bissetrizes de $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ com os lados opostos. Temos

$$m\left(G\hat{I}C\right)=m\left(F\hat{I}B\right)=m\left(A\widehat{F}C\right)-m\left(F\widehat{B}I\right)=\beta+\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}=30°.$$

da mesma forma, temos

$$m\left(G\widehat{E'}L'\right)=m\left(B\widehat{G}A\right)-m\left(GL'E'\right)$$

$$=\frac{\beta}{2}+\gamma-\frac{\gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}=30°$$

pois $m\left(GL'E'\right)=m\left(B\widehat{L'}K'\right)=m\left(B\widehat{C}K'\right)$ já que ambos os ângulos subtendem o mesmo arco $\overset{\frown}{BK'}$.

Assim, $m\left(G\widehat{E'}L'\right)=m\left(G\hat{I}C\right)$, provando que $IE'L'C$ é cíclico.

Sendo O o ponto médio de BC, temos

$$m\left(K\hat{O}L\right)=180°-m\left(L\hat{O}C\right)-m\left(K\hat{O}B\right)$$

$$=180°-\beta-\gamma=120°$$

Assim a distância pedida é $LO\cdot cos\dfrac{m\left(L\hat{O}K\right)}{2}=\dfrac{BC}{2}\cdot cos\,60°=3cm.$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

• Demonstrou que BL e CK são bissetrizes dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$: **[8 pontos]**
• Concluiu: **[2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as acima e nem entre si.

• Calculou alguns ângulos, sem chegar a demonstrar algum fato essencial da prova acima (como $IE'L'C$ ser cíclico): **[no máximo 2 pontos]**
• Determinou a distância pedida em um caso particular (por exemplo ΔABC isósceles): **[2 pontos]**