XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º. ou 9º. anos)
GABARITO

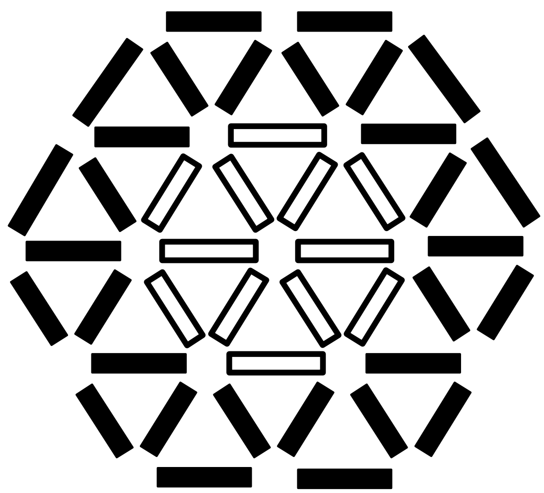
GABARITO NÍVEL 2

1) C	6) C	11) B	16) A	21) E
2) C	7) B	12) C	17) C	22) B
3) C	8) B	13) E	18) D	23) B
4) D	9) C	14) E	19) B	24) A
5) C	10) A	15) B	20) B	25) C

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 2 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1. (C) Se um oitavo do número é $\frac{1}{5}$, então esse número vale $\frac{8}{5}$, de modo que $\frac{5}{8}$ desse número é $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}=1$.

2. (C) Para quadruplicar a área, devemos dobrar o lado do hexágono, como na figura abaixo:

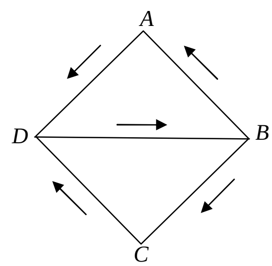


Assim a quantidade de palitos adicionais, em preto na figura, é 30.

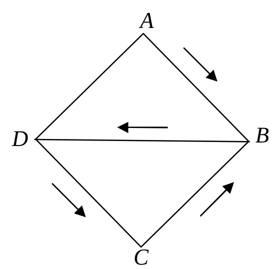
3. (C) Seja C_1 o casal 1 e C_2 o casal 2. É fácil ver que podemos permutar os dois casais nos bancos, ou seja, teremos as seguintes configurações: C_1C_2 e C_2C_1. Além disso, podemos trocar as posições do marido e da mulher em cada casal. Pelo princípio multiplicativo temos $2\cdot 2\cdot 2=8$.

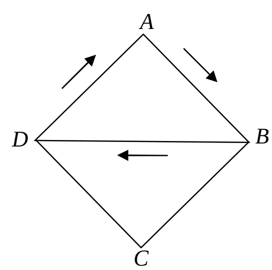
4. (D) $\frac{1}{x+5}=4 \Leftrightarrow x+5=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x+6=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x+6}=\frac{4}{5}$.

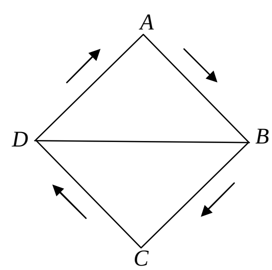
5. (C) Possível caminho: *BADBCD*

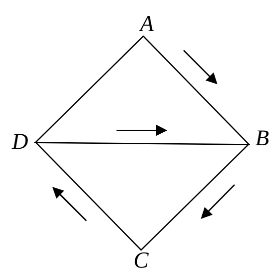


É impossível começar pelas casas *A* ou *C*, basta ver as situações abaixo:









6. (C) Como $15m = 20n \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{4}{3}$ e a fração $\frac{4}{3}$ é irredutível, $m = 4k$ e $n = 3k$, k inteiro positivo. Assim, $mn = 12k^2$, que é múltiplo de 12. Tomando $k = 1$, verificamos que as demais alternativas são incorretas.

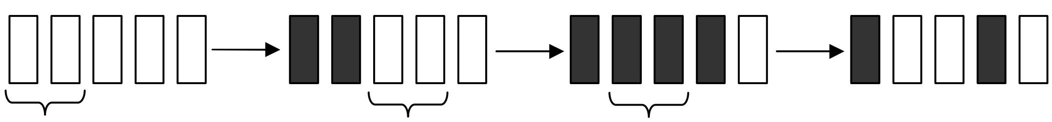
7. (B) Seja XYZ um número de três dígitos que detona 314. Devemos ter $X = 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9; $Y = 2, 3, ..., 9$ e $Z = 5, 6, 7, 8$ ou 9. Portanto, temos 6 opções para o primeiro dígito, 8 para o segundo e 5 para o terceiro. Ou seja $6 \times 8 \times 5 = 240$.

8. (B) Veja que Nelly e Penha pegam juntas $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$ da barra. Portanto, os 70 gramas de Sônia representam $\frac{7}{20}$ da barra. Dessa forma, o peso da barra será $\frac{20}{7} \cdot 70 = 200$ gramas.

9. (C) A soma máxima dos pontos é $6 \times 10 = 60$ e portanto em no máximo três lançamentos o número é obtido não é o máximo.
Assim, em pelo menos sete lançamentos o número é obtido é o máximo 6.

10. (A) A circunferência de centro A e raio AB contém os pontos C, D e E. Logo a medida do ângulo inscrito $E\hat{B}C$ é igual a metade da media do ângulo central $E\hat{A}C$, ou seja, $b = \frac{2a}{2} = a = 18°$.

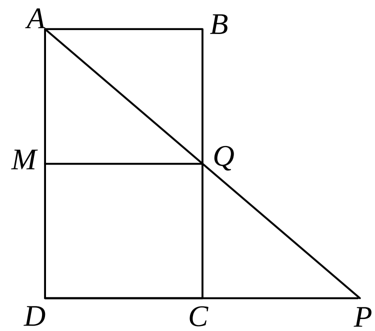
11. (B) Para que a primeira e a quarta cartas fiquem pretas, são necessários pelo menos dois movimentos. Por outro lado, com apenas dois movimentos, a segunda carta seria preta. Assim, a quantidade mínima é três, conforme o exemplo abaixo:



12. (C) As medidas dos ângulos internos de um triângulo equilátero, de um quadrado e de um pentágono regular são, respectivamente, $60°$, $90°$ e $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$. Assim, $m\left(H\hat{D}E\right) = 360° - \left(60° + 90° + 108°\right) = 102°$.
Temos ainda que o triângulo HDE é isósceles com $HD = DE$ e portanto, $\beta + \beta + 102° = 180° \Leftrightarrow \beta = \frac{180° - 102°}{2} = 39°$

13. (E) Como temos $14 + 10 = 24$ torcedores não corintianos, na fila deve existir, sempre entre dois torcedores corintianos, exatamente um torcedor de outra equipe.

14. (E) Traçando uma paralela a DC por Q, temos que Área(ABQ) = Área(AQM). Logo Q é ponto médio de BC.



Dessa forma os triângulos *ABQ* e *QCP* são congruentes e com isso, *PC* = *AB* = 5.

15. (B) Para obtermos a maior diferença possível devemos tomar o maior e o menor primo cuja soma seja 126. Como 123 = 3 · 41, $121 = 11^2, 119 = 7 \cdot 17, 115 = 5 \cdot 23,$ tal representação é 113 + 13, cuja diferença é 113 – 13 = 100.

16. (A) Temos que $BR = RS = SC = \frac{1}{3}BC.$ Sabemos ainda que, como *E* é ponto médio de *AB*, a altura do triângulo *EBR* com relação à base *BR* é igual à metade da altura do triângulo *ABC* com relação à base *BC* e, consequentemente, área $(EBR) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ área$(ABC) = \frac{1}{6}$ área(ABC).

Analogamente, área$(FSC) = \frac{1}{6}$ área$(ABC) = \frac{2}{3} \cdot 252 = 168.$

17. (C) Para *x* e *y* reais:

$$\left(x-y^2\right)^2+\left(x-y-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x-y^2=0 \\ x-y-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=y^2 \\ y^2-y-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=y^2 \\ \left(y=-1 \text{ ou } y=2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \left(x=1 \text{ e } y=-1\right) \\ \text{ou} \\ \left(x=4 \text{ e } y=2\right) \end{array}\right.$$

18. (D) Após completas a tabela, teremos quatro 1´s em cada linha. Como temos 18 linhas, teremos $18 \times 4 = 72$ 1´s em toda a tabela.

Se a quantidade de 1´s é a mesma em cada coluna, e temos seis colunas, teremos $\frac{72}{6} = 12$ 1´s por coluna.

19. (B) Inicialmente, podemos observar que:

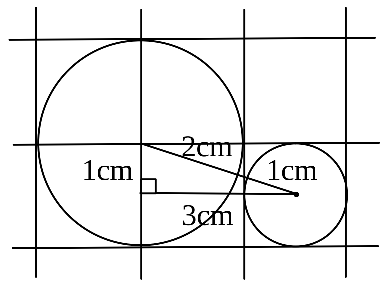
- Como $63^2 = 3969$ e $64^2 = 4096,$ $63^2 < 4018 < 64^2.$
- $2009^2 + 4018 < 2009^2 \cdot 2009 + 1 \Leftrightarrow 2009^2 + 4018 < \left(2009+1\right)^2$
- Logo, entre os inteiros positivos $n + 4018, n = 1, 2, ..., 2009^2,$ encontramos os quadrados perfeitos $64^2, 65^2, ..., 2009^2,$ isto é, $2009 - 64 + 1 = 1946$ ao todo.

20. (B)

$$\begin{array}{l} S_1 = 1+2+3+...+10 = 55 \\ S_2 = 2+4+6+...+20 = 2(1+2+3+...+10) = 2S_1 \\ S_3 = 3+6+9+...+30 = 3(1+2+3+...+10) = 3S_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ S_{10} = 10+20+30+...+100 = 10(1+2+3+...+10) = 10S_1 \end{array}$$

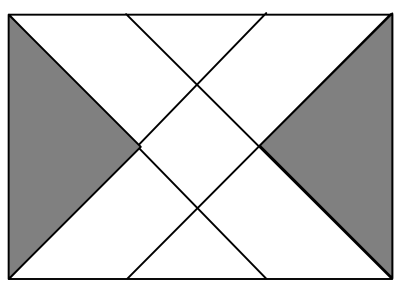
Logo $S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{10} = S_1 + 2S_1 + 3S_1 + ... + 10S_1 = (1+2+3+...+10)S_1 = S_1 \cdot S_1 = 55^2 = 3025.$

21. (E) A distância mínima entre os dois círculos é determinada pelo segmento que une os seus centros. Observando, então, a figura abaixo, concluímos que tal distância é igual a $\sqrt{3^2+1^2} - 2 - 1 = \left(\sqrt{10} - 3\right)$ cm.



22. (B) Listando todas as potências menores ou iguais a 100:
Quadrados: $2^2, 3^2, ..., 10^2$
Cubos: $2^3, 3^3, 4^3 = 8^2$
Demais potências: $2^4 = 4^2, 3^4 = 9^2, 2^5, 2^6 = 8^2$
Portanto 12 naturais podem ser escritos na forma indicada.

23. (B) A figura abaixo mostra todos os pontos amarelos, que são dois triângulos de área $\dfrac{24 \cdot 12}{2} = 144.$ Dessa forma, a área total é 288.



24. (A) Considerando que *x*, *y* e *z* são inteiros positivos, da equação $9 = z(x + y)$ chegamos as seguintes possibilidades ($z = 3$ e $x + y = 3$) ou ($z = 1$ e $x + y = 9$).
Porém $0 < x < y\ z$ e, portanto, $z = 3$, $y = 2$ e $x = 1$. Assim, $t = w(y + z) = 9(2 + 3) = 45$.

25. (C) Considere a quantidade de cubos no quadradinho central da vista de cima apresentada na alternativa C. Esse é o único do meio da vista da frente e portanto deve ter 1 cubo; esse é também o único do meio da vista da esquerda e portanto deve ter 2 cubos, o que não é possível. Então a vista de cima não pode ser a que está apresentada na alternativa C.
As figuras a seguir indicam possíveis quantidades de cubos em cada quadradinho da vista de cima das demais alternativas.